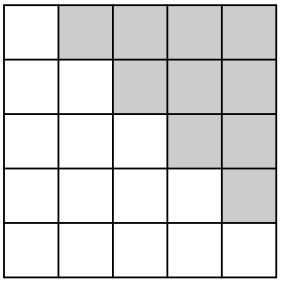
Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z9

Z9–I–1

Do políček tabulky 5×5 doplňte čísla od 1 do 5 tak, aby:

- *každé z čísel bylo v každém řádku i v každém sloupci právě jednou,*
- *součet deseti čísel v šedě vyznačené části byl 21.*

Najděte všechny možnosti. *(J. Tkadlec)*



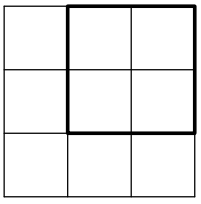
Návodné a doplňující úlohy

N1. Do následující tabulky doplňte čísla 1, 2, 3 tak, aby každé z nich bylo v každém řádku i v každém sloupci právě jednou.

1		
	2	
		3

[Ve druhém řádku i ve druhém sloupci musí být na prvním místě 3 a na posledním 1. Na zbylá dvě místa patří 2.]

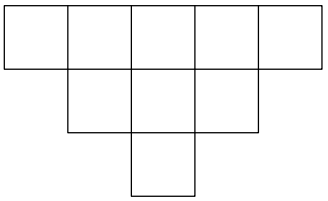
N2. Do následující tabulky doplňte čísla 1, 2, 3 tak, aby každé z nich bylo v každém řádku i v každém sloupci právě jednou a součet čísel v orámované části byl co největší. Určete tento součet.



[Co největší čísla v orámované části mohou být 3, 3, 2 a 1, tedy největší možný součet je 9. Jedno z možných doplnění je na obrázku.]

1	2	3
2	3	1
3	1	2

N3. Do následující tabulky doplňte čísla od 1 do 9 (každé libovolněkrát) tak, aby se v žádném řádku ani sloupci žádné číslo neopakovalo a aby součet všech čísel v tabulce byl a) co největší; b) co nejmenší.



[V prvním případě doplňujeme co nejvíc co největších čísel, ve druhém případě naopak, viz obrázek níže. V obou případech má úloha několik řešení, která se liší umístěním čísel. Největší možný součet je 68 a nejmenší 22.]

a)

9	8	7	6	5
	9	8	7	
		9		

b)

1	2	3	4	5
	1	2	3	
		1		

D1. Hvězdný čtverec je taková čtvercová tabulka čísel, pro kterou platí, že součty čísel v jednotlivých řádcích a sloupcích jsou všechny stejné. Na obrázku je pozůstatek hvězdného čtverce, ve kterém byla čísla v jednom řádku a jednom sloupci smazána. Doplňte chybějící čísla tak, aby všechna byla celá a právě čtyři záporná. Určete všechny možnosti.

1	2	3	
4	5	6	
7	8	9	

[Smazaná čísla lze vyjádřit pomocí neznámého součtu, který označíme s. V posledním sloupci jsou shora čísla $s-6$, $s-15$, $s-24$, v posledním řádku zleva $s-12$, $s-15$, $s-18$

a v rohu $45 - 2s$. Právě čtyři z nich jsou záporná jedině pro $s = 12$, 13, nebo 14. Úloha má tři řešení, viz tabulky níže.[?]]

1	2	3	6
4	5	6	−3
7	8	9	−12
0	−3	−6	21

1	2	3	7
4	5	6	−2
7	8	9	−11
1	−2	−5	19

1	2	3	8
4	5	6	−1
7	8	9	−10
2	−1	−4	17

Z9–I–2

Pro reálná čísla d, e, s, t a v platí:

$$d \cdot v \cdot e = 2,$$
$$s \cdot e \cdot s \cdot t = 6,$$
$$d \cdot e \cdot v \cdot e \cdot t = 9.$$

Určete všechny možné hodnoty součinu $d \cdot v \cdot e \cdot s \cdot t \cdot e$. *(J. Tkadlec)*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Pro reálná čísla a, b, c platí:

$$a \cdot b \cdot c = 14,$$
$$a \cdot c = 20.$$

Určete hodnotu b.

[Dosazením druhé rovnosti do první dostaneme $20b = 14$, a tedy $b = \frac{7}{10}$.]

N2. Pro reálná čísla a, b, c platí:

$$a \cdot b = 3,$$
$$b \cdot c = 6,$$
$$a \cdot c = 9.$$

Určete všechny možné hodnoty součinu $a \cdot b \cdot c$.

[Součin všech tří rovností dává $(a \cdot b) \cdot (b \cdot c) \cdot (a \cdot c) = a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 3 \cdot 6 \cdot 9$, tedy $a \cdot b \cdot c = \pm\sqrt{3 \cdot 6 \cdot 9} = \pm 9\sqrt{2}$. (Obě hodnoty nastanou, a to pro $a = \frac{3}{2}\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$, $c = 3\sqrt{2}$, resp. pro čísla opačná.)]

N3. Pro reálná čísla a, b, c platí:

$$a \cdot b \cdot c^2 = 12\sqrt{6},$$
$$a^2 \cdot c^2 = 12.$$

Jakých hodnot může nabývat součin $b \cdot c$?

[Z druhé rovnosti plyne $a \cdot c = \pm 2\sqrt{3}$. Tedy $b \cdot c = (a \cdot b \cdot c^2) : (a \cdot c) = \pm 12\sqrt{6} : 2\sqrt{3} = \pm 6\sqrt{2}$. (Obě hodnoty nastanou, např. pro $c = 1$ a $a = 2\sqrt{3}$, $b = 6\sqrt{2}$, resp. $a = -2\sqrt{3}$, $b = -6\sqrt{2}$.)]

[?] Převzato z 69. ročníku MO, úloha **Z7–I–5**.

D1. Pro reálná čísla a, b, c platí:

$$a^3 \cdot b^4 \cdot c^5 = 2,$$
$$a^6 \cdot b^5 \cdot c^2 = 12,$$
$$a^3 \cdot b^3 \cdot c = 3.$$

Jakých hodnot může nabývat součin $a \cdot b \cdot c$?

[Z uvedených rovností plyne

$$(a^3 \cdot b^4 \cdot c^5) \cdot (a^6 \cdot b^5 \cdot c^2) : (a^3 \cdot b^3 \cdot c) = a^6 \cdot b^6 \cdot c^6 = 2 \cdot 12 : 3 = 8.$$

Tedy $(a \cdot b \cdot c)^2 = 2$ neboli $a \cdot b \cdot c = \pm\sqrt{2}$. Odtud také plyne $(a \cdot b \cdot c)^3 = 2a \cdot b \cdot c$, což pomocí třetí rovnosti dává $3c^2 = 2a \cdot b \cdot c$. Tedy součin $a \cdot b \cdot c$ musí být kladný a jediná možnost je $\sqrt{2}$. (Tato hodnota nastane pro $c = \pm\sqrt[4]{\frac{8}{9}}$, $a = 2c$ a $b = \frac{3}{4}$, jiná řešení soustava nemá.)]

Z9–I–3

Jsou dány soustředné kružnice k, l a body A, B, C, D tak, že platí:

- *poloměr kružnice k je 10 cm a poloměr kružnice l je větší,*
- *úsečka AB je tětivou kružnice k a měří 16 cm,*
- *úsečka CD je tětivou kružnice l, je kolmá k tětivě AB a prochází bodem B,*
- *trojúhelník ABC je rovnoramenný.*

Jaká může být délka tětivy CD? Určete všechny možnosti. *(M. Macko)*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

V následujících úlohách opakovaně využíváme Pythagorovu větu.

N1. Určete poloměr kružnice opsané obdélníku o rozměrech 4 cm × 6 cm.

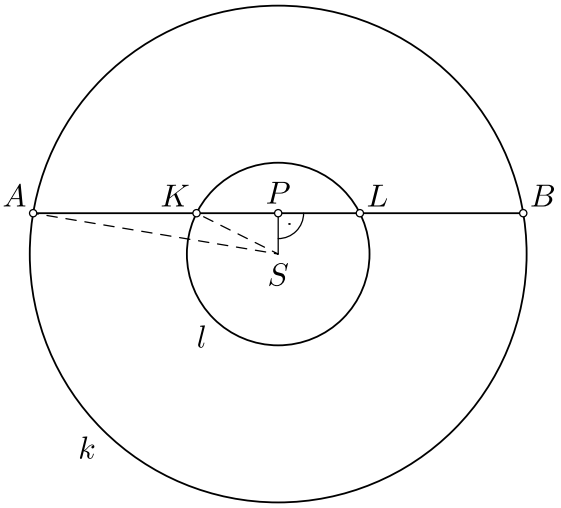
[Průměrem kružnice je úhlopříčka obdélníku. Ta měří $\sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$ cm, tedy poloměr kružnice je $\sqrt{13}$ cm.]

N2. Kružnice k má střed S a poloměr 13 cm. Její tětiva AB je od bodu S vzdálena 5 cm. Vypočítejte délku tětivy AB.

[Označme P střed tětivy AB. Trojúhelník APS je pravoúhlý a $|AP| = \sqrt{13^2 - 5^2} =$ $= 12$ cm. Délka tětivy je 24 cm.]

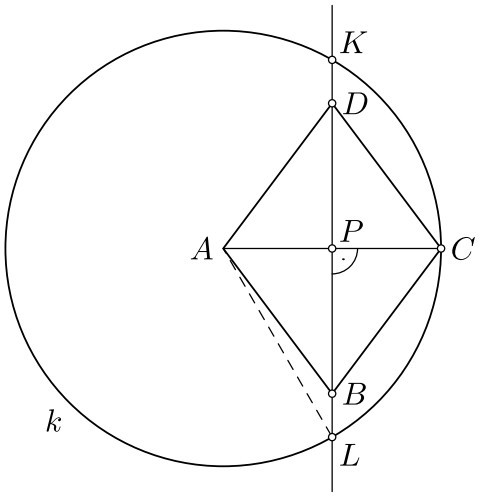
N3. Jsou dány soustředné kružnice k a l, z nichž l má menší poloměr než k. Tětiva AB kružnice k je od společného středu kružnic vzdálena 1 cm a kružnice l ji rozděluje na tři úseky, každý o délce 4 cm. Určete poloměry kružnic k a l.

[Označme S společný střed kružnic, P střed tětivy AB a K, L její průsečíky s kružnicí l. Z pravoúhlých trojúhelníků APS a KPS vypočítáme poloměry kružnic k a l jako $\sqrt{6^2 + 1^2} =$ $= \sqrt{37}$ cm a $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ cm.]



D1. Je dán kosočtverec $ABCD$ a kružnice k se středem A procházející bodem C. Strana kosočtverce měří 10 cm a poloměr kružnice je 12 cm. Kružnice k vytíná na přímce BD tětivu. Určete vzdálenosti bodu B od krajních bodů této tětivy.

[Označme P průsečík úhlopříček kosočtverce a K, L krajní body tětivy jako na obrázku níže. Úhlopříčky kosočtverce se půlí a jsou na sebe kolmé, tedy $|AP| = 6\,\text{cm}$ a tětiva KL je kolmá k AC. Z pravoúhlých trojúhelníků ABP a ALP vypočítáme $|PB| = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\,\text{cm}$ a $|PL| = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}\,\text{cm}$. Hledané vzdálenosti jsou $(6\sqrt{3} - 8)\,\text{cm}$ a $(6\sqrt{3} + 8)\,\text{cm}$.]



Z9–I–4

Ve vstupní hale kina bylo několik jednomístných a několik trojmístných sedaček. Jednou si uvaděčka všimla, že v hale sedělo 25 lidí a 10 sedaček bylo prázdných. Jindy si uvaděčka všimla, že v hale sedělo 14 lidí a 7 sedaček bylo prázdných. V obou případech byla každá trojmístná sedačka buď prázdná, nebo plně obsazená.

Kolik jednomístných a kolik trojmístných sedaček mohlo být v hale? Najděte všechny možnosti. *(M. Macko)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. K čočce nakyselo dávali v restauraci podle přání zákazníka buď dvě, nebo tři vejce natvrdo.

a) Kolik nejvýše porcí připravili, jestliže spotřebovali právě 20 vajec?
b) Kolik nejméně porcí připravili, jestliže spotřebovali právě 20 vajec?
c) Kolik nejvíce a kolik nejméně vajec je třeba na 20 porcí?

[a) Připravili nejvýše $20 : 2 = 10$ porcí. b) $20 = 3 \cdot 6 + 2 \cdot 1$, tedy připravili nejméně $6 + 1 = 7$ porcí. c) Potřebovali nejméně $20 \cdot 2 = 40$ a nejvýše $20 \cdot 3 = 60$ vajec.]

N2. Máme rozdělit 15 bonbónů na hromádky, z nichž každá má tři, nebo čtyři bonbóny. Kolik takových hromádek bude? Najděte všechny možnosti.

[Číslo 15 lze vyjádřit jako součet násobků tří a čtyř buď $15 = 5 \cdot 3$, nebo $15 = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 4$. Hromádek bude pět, nebo čtyři.]

N3. Děti na táboře získávaly za splněné úlohy body. Ty bylo možné dále směňovat: pět bodů za samolepku, šest bodů za tiskátko. Jára si propočítal, že kdyby chtěl jenom samolepky, zbyl by mu jeden bod nevyužitý. Kdyby si vybral jenom tiskátka, nevyužil by tři body. Nakonec dokázal uplatnit všechny svoje body, přičemž získal dvakrát více tiskátek než samolepek. Kolik nejméně bodů měl Jára před směňováním?

[Jedna samolepka a dvě tiskátka stojí 17 bodů, počet bodů je tedy násobkem 17. Čísla 17 a 34 nevyhovují, 51 dává po dělení pěti zbytek 1 a po dělení šesti zbytek 3. Jára měl nejméně 51 bodů.[?]]

D1. Na statku žilo 30 lidí. Statkář nařídil, aby mezi ně rozdělili 30 měřic obilí tak, že každý muž dostane 3 měřice, každá žena 2 měřice a každé dítě půl měřice obilí. Obilí vystačilo přesně. Kolik mužů, žen a dětí žilo na statku? Najděte všechny možnosti.

[Označme m, z a d počty mužů, žen a dětí. Pro množství obilí a počet lidí platí:

$$3m + 2z + \frac{1}{2}d = 30,$$
$$m + z + d = 30.$$

Odečtením druhé rovnice od dvojnásobku první rovnice dostaneme $5m + 3z = 30$. Tedy z je násobek pěti a m násobek tří. Odtud dostáváme tři řešení: $z = 0$, $m = 6$, $d = 24$, nebo $z = 5$, $m = 3$, $d = 22$, nebo $z = 10$, $m = 0$, $d = 20$. (Poslední možnost má smysl, pouze když statkář na statku nežil.)[?]]

[?] Převzato ze 70. ročníku MO, úloha **Z8–II–1**.
[?] Úloha ze středověké sbírky Alkuina z Yorku upravená podle publikace K. Mačák: Tři středověké sbírky matematických úloh, Prometheus, Praha, 2001.

Z9–I–5

Na tabuli je napsáno číslo 100. Dva kamarádi hrají hru podle následujících pravidel:

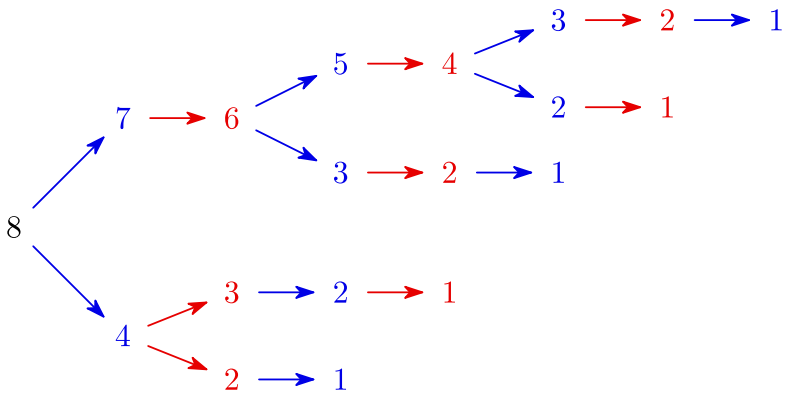
- *Hráči se u tabule pravidelně střídají.*
- *V každém tahu hráč číslo smaže a nahradí číslem novým.*
- *Nové číslo je z předchozího vytvořeno buď odečtením jedné, nebo vydělením dvěma.*
- *Všechna napsaná čísla jsou přirozená.*
- *Vyhrává hráč, který napíše číslo 1.*

Ukázalo se, že jeden z hráčů může postupovat tak, aby zaručeně vyhrál. Který hráč to je a kolik nejméně tahů k výhře potřebuje? *(I. Jančigová)*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Uvažme hru ze soutěžní úlohy, v níž je na začátku napsáno číslo 8 místo 100. Najděte všechny možné průběhy této hry.

[Hra má 5 různých průběhů, které jsou znázorněny v následujícím grafu: modře jsou vyznačeny tahy prvního hráče, červeně tahy druhého hráče.]



N2. Jak by probíhala hra ze soutěžní úlohy s nejmenším možným počtem tahů? Kdo by vyhrál?

[Hráči by dělili dvěma, kdykoli by to bylo možné. Vyhrál by druhý hráč, viz následující schéma.]

$$100 \to 50 \to 25 \to 24 \to 12 \to 6 \to 3 \to 2 \to 1$$

N3. Najděte tři nejmenší počáteční čísla hry ze soutěžní úlohy, pro která může druhý hráč postupovat tak, aby zaručeně vyhrál.

[Jsou to čísla 3, 5 a 7: liché číslo může první hráč jen zmenšit o 1, druhý pak hraje např. jako v následujícím schématu.]

$$\begin{aligned} 3 &\to 2 \to 1 \\ 5 \to 4 &\to 3 \to 2 \to 1 \\ 7 \to 6 &\to 3 \to 2 \to 1 \end{aligned}$$

D1. Hra NIM má mnoho variant, uvažujme tuto: Na hromádce je 12 sirek. Dva hráči se pravidelně střídají v tazích. V každém tahu hráč odebere jednu, nebo dvě sirky. Prohrává ten hráč, který odebere poslední sirku. Pokud to je možné, najděte vítěznou strategii pro prvního hráče.

[Možné to je: stačí, když po tahu prvního hráče zůstane na hromádce 10, 7, 4 a nakonec 1 sirka. Tedy první hráč odebere dvě sirky a dále po každém tahu soupeře doplní jeho tah na tři sirky.]

Z9–I–6

Je dán rovnoběžník $ABCD$ a jeho vnitřní bod P s těmito vlastnostmi:

- $|BC| = |CP| = |PD|$,
- $|\sphericalangle PBA| = |\sphericalangle PCB|$,
- $|\sphericalangle BAP| = 15°$.

Určete velikost úhlu APB. *(P. Bak)*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. V rovnoběžníku $ABCD$ je vnitřní úhel u vrcholu A o 30° větší než vnitřní úhel u vrcholu B. Určete velikosti vnitřních úhlů rovnoběžníku.

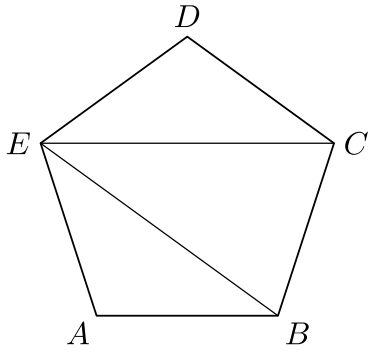
[V rovnoběžníku jsou protější úhly shodné a sousední úhly dávají dohromady 180°. Tedy úhly u vrcholů A a C mají velikost 105°, u vrcholů B a D mají velikost 75°.]

N2. V rovnoramenném trojúhelníku RST se základnou RS značí φ velikost vnitřního úhlu u vrcholu T. Vyjádřete pomocí φ velikosti ostatních vnitřních a všech vnějších úhlů trojúhelníku RST.

[Součet velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku je 180° a úhly u základny rovnoramenného trojúhelníku jsou shodné. Vnitřní úhly u vrcholů R a S mají velikost $90° - \frac{1}{2}\varphi$. Vnější úhly u vrcholů R, S, T mají velikosti $90° + \frac{1}{2}\varphi$, $90° + \frac{1}{2}\varphi$, $180° - \varphi$.]

N3. Rozdělte pravidelný pětiúhelník na tři rovnoramenné trojúhelníky a jejich rovnoramennost zdůvodněte.

[Pětiúhelník $ABCDE$ lze rozdělit např. na trojúhelníky ABE, BCE a CDE. Všechny strany, resp. všechny úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku jsou navzájem shodné. Proto jsou shodné strany AB a AE v trojúhelníku ABE, strany EB a EC v trojúhelníku BCE a strany DC a DE v trojúhelníku CDE.]



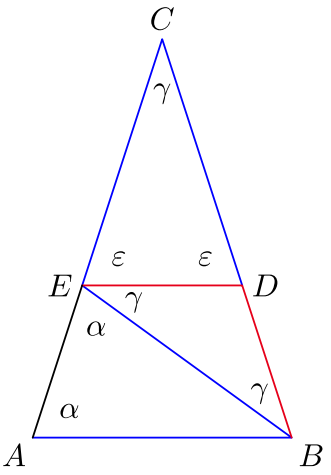
D1. V trojúhelníku ABC leží bod D na straně BC, bod E na straně AC a platí

$$|AB| = |BE| = |EC| = |CD|, \quad |BD| = |DE|.$$

Určete velikosti úhlů ACB a BAD.

[Na obrázku níže jsou shodné úsečky zvýrazněny stejnými barvami a shodné úhly stejnými symboly. Úhel EDC je vnějším úhlem trojúhelníku EDB, tedy $\varepsilon = 2\gamma$. Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku EDC je 180°, tedy $2\varepsilon + \gamma = 5\gamma = 180^\circ$. Velikost úhlu ACB je 36°.

Úhel CEA je přímý, tedy $\varepsilon + \gamma + \alpha = 180^\circ$. Z předchozího víme $\varepsilon = 2\gamma$ a $180^\circ = 5\gamma$, tedy $\alpha = 2\gamma$. Odtud plyne shodnost úhlů CED a CAB, tedy rovnoběžnost úseček ED a AB, a tedy rovnoramennost trojúhelníku ABC. Ze souměrnosti trojúhelníku ABC je úhel BAD shodný s úhlem ABE a jeho velikost je $\alpha - \gamma = \gamma = 36^\circ$.[?]]



[?] Převzato ze 74. ročníku MO, úloha **Z8–II–3**.