Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z8

Z8–I–1

Klasická hrací kostka má na svých stěnách tečky v počtech od 1 do 6 tak, že součet teček na každých dvou protilehlých stěnách je sedm. Tři kamarádky si rozdělily 24 stejných hracích kostek a každá ze svých osmi kostek slepila kvádr či krychli. Žádné dva z těchto tří útvarů neměly stejné rozměry a každý byl slepen tak, aby součet teček na jeho povrchu byl co největší.

Jaké součty teček mohly kamarádky dostat? *(M. Macko)*

Návodné a doplňující úlohy

Stejně jako v soutěžní úloze má i v následujících úlohách hrací kostka na každé stěně jednu až šest teček a na každých dvou protilehlých stěnách je součet teček sedm.

N1. Mirek k sobě slepil dvě hrací kostky a získal tak kvádr. Jaký největší a jaký nejmenší počet teček mohl být dohromady na stěnách takto vzniklého kvádru?

[Na slepených stěnách mohlo být nejméně 2 a nejvíce 12 teček. Součet všech teček na dvou kostkách je 42, na povrchu kvádru tedy mohlo být nejvíce 40 a nejméně 30 teček.]

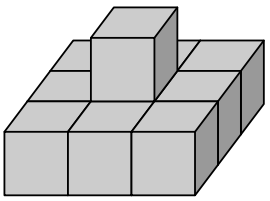
N2. Jana slepila čtyři hrací kostky tak, že nebyly všechny v jedné řadě a dohromady tvořily kvádr. Jaký největší a jaký nejmenší počet teček mohl být na povrchu kvádru?

[Kvádr měl rozměry $2 \times 2 \times 1$. Každá kostka má na čtvercových stěnách kvádru dvojici protilehlých stěn (7 teček) a další dvě viditelné sousední stěny s nejvýše $5+6=11$ a nejméně $1+2=3$ tečkami. Na povrchu kvádru tedy mohlo být nejvíce $4 \cdot (7+11) = 72$ a nejméně $4 \cdot (7+3) = 40$ teček.]

N3. Radim skládal tělesa, pokaždé z 12 shodných krychlí, které slepoval k sobě celými stěnami. Kolik různých kvádrů takto mohl vytvořit? Kvádry, které lze na sebe převést otočením, považujeme za stejné.

[Krychle je možné slepit k sobě v řadě (kvádr $12\times1\times1$), ve dvou řadách (kvádr $6\times2\times1$), ve třech řadách (kvádr $4\times3\times1$) a ve dvou řadách a dvou vrstvách (kvádr $3\times2\times2$). Radim mohl vytvořit 4 různé kvádry.]

D1. Jenda má 100 hracích kostek, ze kterých skládal pyramidu se čtvercovou základnou. Každé patro pyramidy je čtverec a každé nižší patro přečnívá na všech čtyřech stranách o šířku jedné kostky. Horní dvě patra pyramidy jsou na obrázku níže. Kolik nejvýše pater mohla mít Jendova pyramida a kolik nejvíce teček mohlo být na povrchu stavby? Tečky na spodku pyramidy nezapočítáváme.



[Počty kostek v patrech jsou 1, 9, 25, 49 atd. Pyramida může mít nejvýše 4 patra (1+9+25+49 = 84). Horní kostka má na povrchu 5 stěn (nejvýše 20 teček). Dvanáct rohových kostek pater má na povrchu 3 stěny (nejvýše 15 teček) a zbylých 36 kostek na okrajích pater 2 stěny (nejvýše 11 teček). Na povrchu může být nejvýše $20 + 12 \cdot 15 + 36 \cdot 11 = 596$ teček.]

Z8–I–2

Najděte všechny dvojice kladných celých čísel a a b s následujícími vlastnostmi:

- *obě čísla a a b jsou menší než 50,*
- *součin $a \cdot b$ je dělitelný 11, ale součet $a + b$ není dělitelný 11,*
- *součin $a \cdot b$ je dělitelný 17, ale součet $a + b$ není dělitelný 17,*
- *jak součin $a \cdot b$, tak součet $a + b$ jsou dělitelné 2.*

(E. Semerádová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Najděte všechny dvojice různých jednomístných přirozených čísel, jejichž a) součet; b) součin je dělitelný sedmi.

[a) Součet je buď 7, nebo 14. Vyhovují dvojice 1 a 6, 2 a 5, 3 a 4, 5 a 9, 6 a 8. b) Jedno z čísel je dělitelné sedmi, a to je jen 7. Vyhovují dvojice, kde jedno číslo je 7 a druhé kterékoli z 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9.]

N2. Z čísel 3, 5, 12, 25, 9, 17 vyberte všechny dvojice, jejichž

a) součin je dělitelný pěti, ale součet není dělitelný pěti;
b) součin i součet jsou dělitelné třemi.

[a) Právě jedno z čísel je dělitelné pěti. Vyhovuje 5 nebo 25 s kterýmkoli z čísel 3, 12, 9, 17 (8 dvojic). b) Obě čísla jsou dělitelná třemi. Vyhovují dvojice 3 a 12, 3 a 9, 12 a 9.]

N3. Najděte všechny dvojice různých dvojmístných čísel, jejichž součin i součet jsou dělitelné číslem 19 a jejichž a) součin; b) součet je dělitelný dvěma.

[Obě čísla jsou dělitelná 19. Dvojmístné násobky 19 jsou 19, 38, 57, 76, 95. a) Alespoň jedno číslo je sudé. Vyhovuje 38 nebo 76 s kterýmkoli dalším z vyjmenovaných čísel (7 dvojic). b) Obě čísla jsou sudá, nebo obě lichá. Vyhovují dvojice 38 a 76, 19 a 57, 19 a 95, 57 a 95.]

D1. Vyslovte pravidlo, kdy pro dvě přirozená čísla a, b platí:

a) součin $a \cdot b$ je dělitelný 11;
b) součet $a + b$ je dělitelný 7;
c) součin $a \cdot b$ je dělitelný 6.

[a) Součin $a \cdot b$ je dělitelný 11, právě když alespoň jedno z čísel a, b je dělitelné 11 (11 je prvočíslo). b) Součet $a + b$ je dělitelný 7, právě když součet zbytků čísel a, b po dělení sedmi je 0, nebo 7 (zejména je-li jedno z čísel dělitelné 7, musí být i druhé dělitelné 7). c) Součin $a \cdot b$ je dělitelný 6, právě když alespoň jedno z čísel a, b je dělitelné 2 a alespoň jedno je dělitelné 3 (prvočíselný rozklad 6 je $2 \cdot 3$).]

D2. Kolik existuje trojmístných čísel složených ze tří různých nenulových číslic takových, že součin i součet jejich číslic jsou dělitelné třemi?

[Pro součin dělitelný třemi musí být alespoň jedna z číslic dělitelná třemi. Pro součet dělitelný třemi mohou nastat dva případy: buď jsou všechny číslice dělitelné třemi (3, 6, 9 v libovolném pořadí), nebo je jedna číslice dělitelná třemi (3, 6, nebo 9), jedna dává po dělení třemi zbytek 1 (1, 4, nebo 7) a jedna dává zbytek 2 (2, 5, nebo 8). V prvním případě dostáváme 6 možností (pořadí číslic) a ve druhém $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 6 = 162$ možností (výběr a pořadí číslic). Takových čísel je 168.]

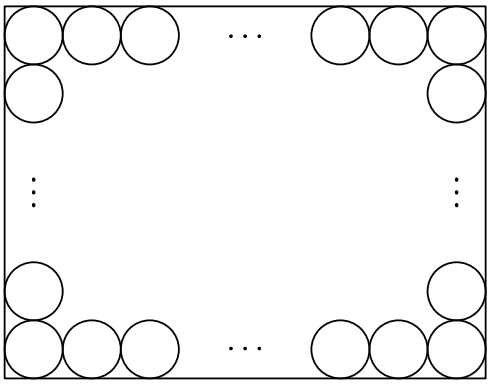
Z8–I–3

Alfons poskládal 56 kruhových etiket s poloměry 4 cm na stůl ve tvaru obdélníku tak, že platilo:

- *každé strany stolu se dotýkala nějaká etiketa,*
- *rohové etikety se dotýkaly dvou stran stolu,*
- *ostatní etikety se dotýkaly jedné strany stolu,*
- *sousední etikety se dotýkaly navzájem.*

Na druhý stůl stejných rozměrů začal skládat kruhové etikety s poloměry 3 cm a snažil se dodržet všechny podmínky ze stolu prvního. Po uložení celé řady podél jedné strany zjistil, že použil o 6 etiket více než podél stejné strany na prvním stole.

Zjistěte rozměry stolu. *(M. Macko)*

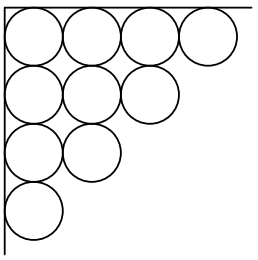


Návodné a doplňující úlohy

N1. Kolik etiket o průměru 4 cm lze poskládat podél čtyř stran desky obdélníkového stolu o rozměrech 120 cm × 100 cm tak jako v soutěžní úloze?

[Podél delší strany stolu se vejde 30 etiket, podél kratší strany 25 etiket, rohové etikety jsou společné dvěma stranám. Na stůl se vejde $2 \cdot 30 + 2 \cdot 25 - 4 = 106$ etiket.]

N2. Iva připravuje občerstvení na sportovní den a zjistila, že pokud všech 45 kelímků s limonádou vyskládá na obdélníkový stůl o rozměrech 60 cm × 108 cm tak, jak je naznačeno na obrázku, zaplní jimi celý stůl. Určete průměr kelímku.

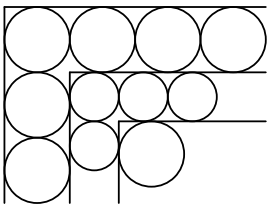


[Poměr stran stolu je $60 : 108 = 5 : 9$ a $5 \cdot 9 = 45$, tedy podél kratší strany je 5 kelímků a podél delší 9. Průměr kelímku je $60 : 5 = 108 : 9 = 12\,\text{cm}$.]

N3. Bořek ohraničil část rovné cesty špalíky, které skládal těsně k sobě. Na jedné straně použil špalíky o průměru 18 centimetrů, na druhé straně špalíky o průměru 12 centimetrů a malých špalíků použil o 11 více než velkých. Jak dlouhý byl ohraničený úsek?

[Na každé tři malé špalíky připadají dva velké. Malých bylo o 11 více než velkých, tedy malých bylo 33 a velkých 22. Délka ohraničeného úseku byla $33 \cdot 12 = 22 \cdot 18 = 396\,\text{cm}$.]

D1. Richard skládal na stolek o rozměrech $80\,\text{cm} \times 40\,\text{cm}$ etikety o průměrech 4 cm a 3 cm, jak je naznačeno na obrázku. Začal skládat větší etikety podél dvou sousedních stran stolu, aby se jich dotýkaly a dotýkaly se i navzájem. V obou směrech jich položil tolik, kolik se na stolek vešlo celých. Poté narýsoval dvě úsečky rovnoběžné s hranami stolu, které se etiket dotýkaly. Podél těchto úseček skládal menší etikety podle stejných pravidel, opět narýsoval dvě úsečky a takto pokračoval, dokud to bylo možné. Kolik velkých etiket Richard použil?



[Po každém kole skládání se volná část stolku zmenšila v obou směrech o průměr právě použitých etiket. Richard postupně skládal velké etikety do částí o rozměrech 80×40, 73×33, 66×26, 59×19, 52×12, 45×5 (všechny rozměry v cm). Odpovídající počty velkých etiket byly 29, 25, 21, 17, 15, 11, jejich součet je 118.]

Z8–I–4

V prvním ročníku naší školy jsou dvě třídy — 1. A a 1. B. V 1. A je o polovinu více chlapců než v 1. B, o čtvrtinu více děvčat než v 1. B a celkově o třetinu více žáků než v 1. B. Jakou část všech žáků prvního ročníku tvoří děvčata? *(J. Tkadlec)*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Zita a Dita se domluvily, že o víkendu budou hodně sportovat. Zita ujela na kole stejnou vzdálenost jako na kolečkových bruslích, dohromady ujela 72 kilometrů. Dita ujela na kole o čtvrtinu větší vzdálenost než Zita, na kolečkových bruslích však ujela

o dvě třetiny menší vzdálenost než Zita. Kolik kilometrů překonala Dita na kole a kolečkových bruslích dohromady?

[Zita ujela na kole 36 kilometrů, Dita tedy ujela 45 kilometrů. Zita ujela na kolečkových bruslích 36 kilometrů, Dita jen 12 kilometrů. Dohromady Dita ujela 57 kilometrů.]

N2. V osmém ročníku jsou dvě třídy, 8. A a 8. B, v každé z nich je 24 žáků. V 8. A je o polovinu více chlapců než v 8. B a v 8. B tvoří chlapci třetinu třídy. Jak velkou část ročníku tvoří chlapci?

[V 8. B je 8 chlapců, v 8. A jich je 12, tj. dohromady 20 chlapců. Celkem je v ročníku 48 žáků, tedy chlapci tvoří $\frac{20}{48} = \frac{5}{12}$ ročníku.]

N3. Karel, Kuba a Kryštof trhali třešně. Karel natrhal o čtvrtinu více než Kuba, Kryštof o třetinu méně než Karel, dohromady natrhali 37 kilogramů třešní. Kolik kilogramů třešní natrhal Karel?

[Poměr třešní Kuby a Karla je 4 : 5, poměr třešní Karla a Kryštofa 3 : 2. Rozdělíme-li Karlovy třešně na 15 stejných dílů, má Kuba 12 a Kryštof 10 dílů. To je celkem 37 dílů, tedy jeden díl odpovídá 1 kg třešní. Karel natrhal 15 kg třešní.]

D1. Včera vydojili na farmě Doj dvakrát více mléka než na farmě Hoj a na farmě Joj dvakrát více mléka než na farmě Doj. Každá farma poslala část vydojeného mléka ke zpracování na máslo. Farma Doj poslala na výrobu másla $\frac{7}{8}$ svého mléka, farma Hoj $\frac{3}{4}$ svého mléka. Z mléka vydojeného na všech třech farmách dohromady šlo na výrobu másla 90 %. Jakou část svého mléka poslala na výrobu másla farma Joj?

[Farmy Hoj, Doj a Joj vydojily 1, 2 a 4 díly mléka, celkem 7 dílů. Na máslo šlo celkem $\frac{9}{10} \cdot 7 = 6{,}3$ dílu, přitom z farem Hoj a Doj šlo $\frac{3}{4} + \frac{7}{8} \cdot 2 = 2{,}5$ dílu. Farma Joj poslala na máslo $6{,}3 - 2{,}5 = 3{,}8$ ze svých 4 dílů, což je $\frac{38}{40} = 95\,\%$.[?]]

Z8–I–5

Honza, Mikuláš a Víťa si vytyčili cyklokrosový okruh. Honza odstartoval závod Mikuláše a Víti na 12 okruhů. Když Mikuláš poprvé projížděl kolem Honzy, vydal se Honza v protisměru naproti Víťovi, který byl pozadu. Honza ušel 150 metrů, než Víťu potkal. V tom okamžiku měl Víťa zdolánu čtrnáctinu celkové délky závodu.

Kolik metrů měřil jeden okruh? *(L. Dedková)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Eliška se rozhodla, že dvakrát oběhne školu. Spolu s Davidem odstartovali před hlavním vchodem, ale opačným směrem. Eliška potkala Davida po 100 metrech svého běhu a do splnění plánu jí zbývala ještě dvakrát delší vzdálenost. Kolik metrů uběhl do setkání s Eliškou David?

[Eliška se potkala s Davidem ve třetině své cesty. Tedy měla uběhnout 300 metrů a jeden okruh měřil 150 metrů. Do setkání uběhli Eliška s Davidem dohromady jeden okruh, tedy David uběhl 50 metrů.]

N2. Marek, Eva a Jakub se domluvili, že se odpoledne sejdou v parku. Marek a Eva dorazili včas, ale Jakub měl zpoždění. Marek s Evou si čekání na Jakuba krátili obcházením

[?] Převzato ze 74. ročníku MO, úloha **Z9–II–3**.

parku. Marek park obcházel po vnějším okraji, Eva obcházela menší okruh kolem květinového záhonu. Markův okruh měřil 1,2 kilometru a stihl ho obejít přesně třikrát. Eva za stejný čas stejným tempem obešla svůj okruh přesně osmkrát. Jak dlouhý byl okruh kolem květinového záhonu?

[Marek ušel celkem 3,6 kilometru, stejně jako Eva. Evin okruh byl dlouhý $3{,}6 : 8 = 0{,}45$ kilometru, tj. 450 metrů.]

N3. Natálka pletla věnce z pampelišek. Dopoledne pletla velké věnce, každý ze 45 pampelišek, a odpoledne malé věnce, které měly o 18 pampelišek méně než velké věnce. Odpoledne upletla o 10 věnců více než dopoledne, přičemž její práce dopoledne i odpoledne trvala stejně dlouho a čas potřebný na upletení věnce byl přímo úměrný počtu pampelišek. Kolik věnců celkem Natálka upletla?

[Dopoledne i odpoledne zapletla stejné množství pampelišek. Malý věnec měl $45 - 18 = 27$ pampelišek, tedy deset malých věnců navíc mělo 270 pampelišek. Velkých věnců bylo $270 : 18 = 15$, malých $15 + 10 = 25$, celkem 40 věnců.]

D1. Pat a Mat se vykoupali v rybníce a pak si dali závod do své chaloupky. V jistém okamžiku platilo, že kdyby Mat měl zdolánu polovinu vzdálenosti, kterou dosud uběhl, chyběl by mu do chaloupky trojnásobek oné poloviční vzdálenosti. V tomtéž okamžiku platilo, že kdyby Pat měl zdolán dvojnásobek vzdálenosti, kterou dosud uběhl, chyběla by mu do chaloupky třetina oné dvojnásobné vzdálenosti. Kdo byl v daném okamžiku blíž chaloupce?

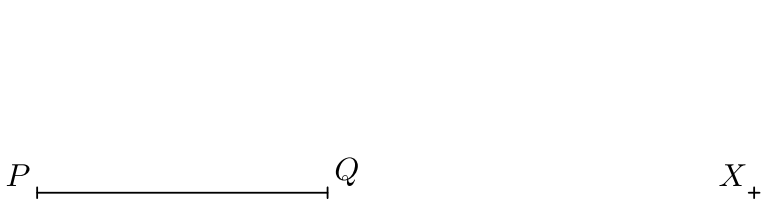
[Celá trať odpovídá čtyřem polovinám vzdálenosti, kterou Mat uběhl od rybníka, a současně čtyřem třetinám dvojnásobku Patovy vzdálenosti od rybníka. Tedy Mat uběhl $\frac{1}{2}$ a Pat $\frac{3}{8}$ vzdálenosti od rybníka k chaloupce. Blíž chaloupce byl Mat.[?]]

Z8–I–6

Jsou dány body X, Y a úsečka PQ jako na obrázku. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby platilo:

- *poloměr kružnice opsané trojúhelníku BCD je roven délce úsečky PQ,*
- *bod X leží na úhlopříčce BD a bod Y leží na úhlopříčce AC,*
- *body X a Y jsou souměrné podle osy rovnoběžné s přímkou AB.*

Popište a zdůvodněte svoji konstrukci. *(M. Janičová)*



[?] Převzato ze 73. ročníku MO, úloha **Z9–I–1**.

Návodné a doplňující úlohy

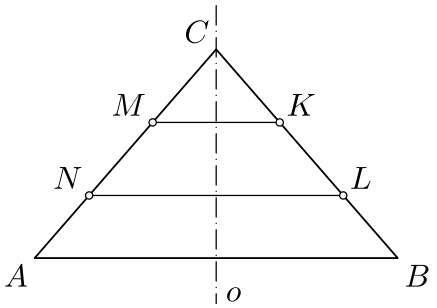
N1. Popište polohu středu kružnice opsané trojúhelníku

a) ABC, jehož strana AB má délku 6 centimetrů a obě zbylé strany jsou o třetinu kratší;
b) KLM, ve kterém jsou všechny vnitřní úhly shodné;
c) PQR, ve kterém úhel u vrcholu P je pravý a strany PQ a PR mají délku 4 cm.

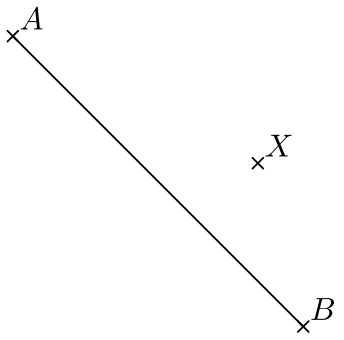
[Střed kružnice opsané je průsečíkem os stran trojúhelníku. a) Trojúhelník je rovnoramenný a tupoúhlý. Střed leží na ose základny AB mimo trojúhelník. b) Trojúhelník je rovnostranný, osy stran splývají s výškami. Střed je jejich průsečíkem a leží uvnitř. c) Trojúhelník je rovnoramenný a pravoúhlý. Střed kružnice opsané je středem přepony QR.]

N2. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB. Na straně BC leží dva různé body K, L a na straně AC leží dva různé body M, N tak, že body K, M jsou osově souměrné podle osy o a body L, N jsou osově souměrné podle téže osy. Načrtněte a popište, kudy osa o prochází.

[Souměrnost podle osy o zobrazí přímku KL na přímku MN. Tedy o je osou úhlu ACB, což je osa souměrnosti trojúhelníku ABC, resp. výška na základnu AB.]

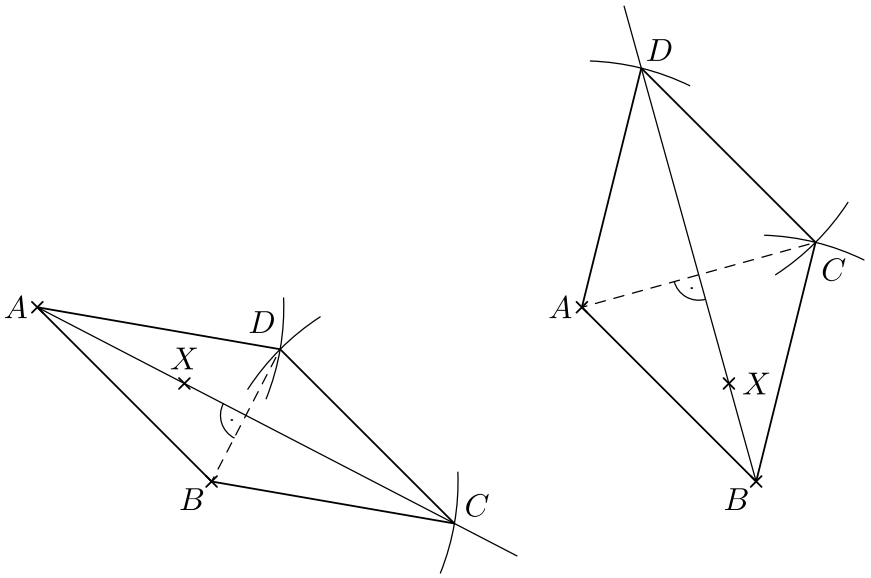


D1. Sestrojte kosočtverec $ABCD$, je-li dána jeho strana AB a bod X, který leží na přímce obsahující některou úhlopříčku kosočtverce. Najděte všechny možnosti.



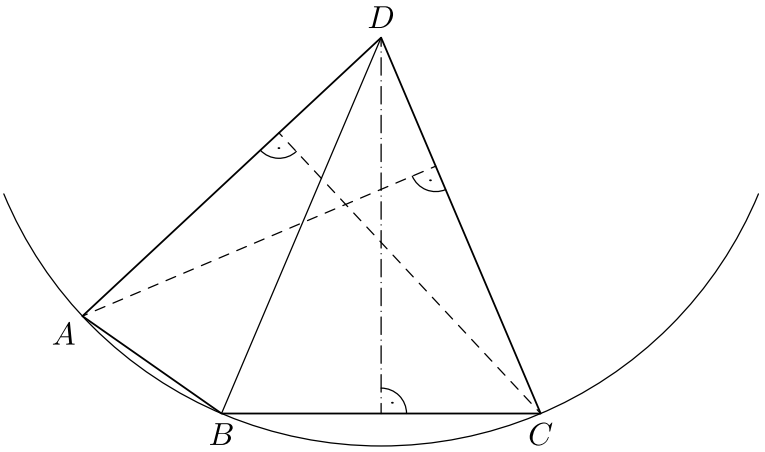
[Úloha má dvě řešení podle toho, zda bod X leží na úhlopříčce AC, nebo na BD. V prvním případě je vrchol C na přímce AX a zároveň platí $|BC| = |AB|$, tedy C je průsečíkem různým od A přímky AX s kružnicí $k(B, |AB|)$. Vrchol D lze sestrojit doplněním do rovnoběžníku nebo pomocí shodných kružnic s poloměrem $|AB|$ a středy A a C. Druhý případ

je obdobný. V obou případech lze využít osových souměrností podle úhlopříček (úhlopříčky kosočtverce jsou kolmé), příp. středové souměrnosti podle středu kosočtverce (střed leží na Thaletově kružnici s průměrem AB).]



D2. Ve čtyřúhelníku $ABCD$ platí, že bod D leží na ose úsečky BC a vzdálenost bodu A od přímky CD je stejná jako vzdálenost bodu C od přímky AD. Dokažte, že čtyřúhelníku $ABCD$ nelze opsat kružnici.

[Z rovnosti výšek trojúhelníku ACD a dvojího vyjádření jeho obsahu plyne $|AD| = |CD|$. To spolu s $|BD| = |CD|$ znamená, že D je středem kružnice procházející body A, B, C. Tato kružnice je jediná a bod D na ní neleží.[?]]



[?] Převzato ze 75. ročníku MO, úloha **Z9–III–4**.