Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z7

Z7–I–1

Je dán čtverec, který je složen z 52 nepřekrývajících se menších čtverců. Z nich 51 má obsah 1 cm^2 a zbylý čtverec má délku strany v centimetrech vyjádřenou přirozeným číslem.

Jaký obsah může mít daný čtverec? Určete všechny možnosti. *(E. Novotná)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Míša měla v krabici dílky skládačky, celkem 8 čtverců o straně 1 cm a 5 čtverců o straně 2 cm. Opakovaně z těchto dílků sestavovala čtverce. Jaké obsahy mohly mít sestavené čtverce? Najděte všechny možnosti.

[Lze sestavit čtverec o obsahu 1 cm^2, 4 cm^2, 9 cm^2 a 16 cm^2. Na čtverec s obsahem 25 cm^2 nemá Míša dost vhodných dílků a útvar s obsahem větším než 28 cm^2 ze svých dílků nesloží.]

N2. Máme obdélníkové dílky o rozměrech 3 cm × 5 cm. Jaký je obsah nejmenšího čtverce sestaveného z takových dílků?

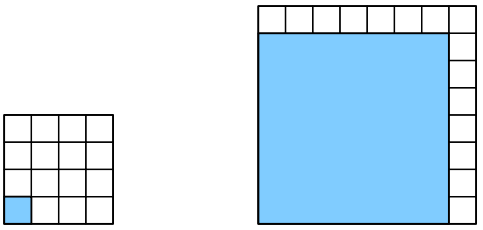
[Obsah čtverce je násobkem 15, nejmenší obsah je $15 \cdot 15 = 225$ cm^2. Takový čtverec poskládat lze: 5 dílků podél jedné strany, 3 podél druhé.]

N3. Máme obdélníkové dílky o rozměrech 4 cm × 6 cm. Jaký je obsah nejmenšího čtverce sestaveného z takových dílků?

[Obsah čtverce je násobkem 24, nejmenší takový obsah je $12 \cdot 12 = 6 \cdot 24 = 144$ cm^2. Takový čtverec poskládat lze: 3 dílky podél jedné strany, 2 podél druhé.]

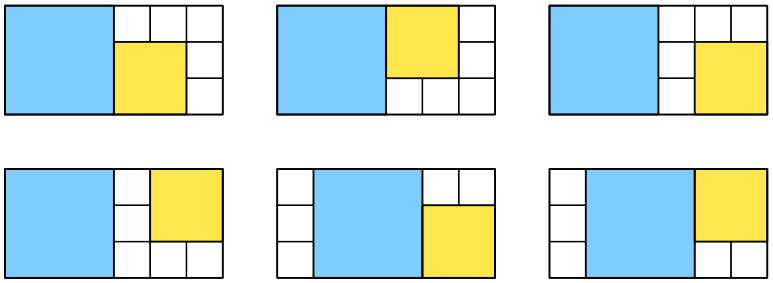
N4. Strana čtverce je v centimetrech vyjádřena přirozeným číslem. Čtverec jsme doplnili 15 čtverečky o straně 1 cm na větší čtverec. Jakou stranu mohl mít původní čtverec? Najděte všechny možnosti.

[Rozdíl obsahů většího a menšího čtverce je 15 cm^2. Postupným zkoušením zjistíme, že původní čtverec mohl mít stranu 1 cm, nebo 7 cm ($1 \cdot 1 + 15 = 4 \cdot 4$, $7 \cdot 7 + 15 = 8 \cdot 8$).]



D1. Máme k dispozici pět čtvercových dílků o straně 1 cm, jeden čtvercový dílek o straně 2 cm a jeden čtvercový dílek o straně 3 cm. Kolika způsoby můžeme ze všech těchto dílků poskládat obdélník? Záleží jen na poloze čtvercových dílků v obdélníku. Dvě poskládání budeme považovat za stejná, pokud se dají na sebe převést otočením.

[Obsah obdélníku musí být $5 \cdot 1 + 4 + 9 = 18$ cm^2 a obě jeho strany musí měřit alespoň 3 cm. Jediný vyhovující obdélník má rozměry 3 cm a 6 cm. Možná poskládání jsou znázorněna na obrázku níže.]



Z7–I–2

Ve čtyřech zásuvkách bylo dohromady 62 kuliček. Postupně jsme do některých zásuvek přesouvali kuličky z ostatních tří zásuvek, a to ze všech stejně:

- *nejprve po šesti kuličkách do třetí zásuvky,*
- *poté po třech kuličkách do druhé zásuvky,*
- *poté po jedné kuličce do první zásuvky.*

Nakonec bylo ve druhé zásuvce o pět kuliček víc než v první, ve třetí o pět víc než ve druhé a ve čtvrté o pět víc než ve třetí.

Kolik kuliček bylo v jednotlivých zásuvkách před přesouváním? *(V. Dedek)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. V každé ze dvou misek bylo 15 kuliček. Kolik kuliček musíme přendat z první misky do druhé, aby

a) jich ve druhé misce bylo o 8 více než v první misce;

b) jich ve druhé misce bylo o 9 více než v první misce;

c) jich ve druhé misce bylo čtyřikrát více než v první misce?

[Každá přendaná kulička zvětší rozdíl o 2. a) 4 kuličky; b) nelze, rozdíl musí být sudý; c) 9 kuliček.]

N2. Máme tři misky a v nich kuličky. V první misce je o 7 kuliček méně než ve druhé misce. Ve druhé misce je o polovinu více kuliček než ve třetí misce. Ve třetí misce je 60 kuliček. Kolik kuliček je v první misce?

[Ve druhé misce je $60 + 30 = 90$ kuliček, v první je $90 - 7 = 83$ kuliček.]

N3. Ve dvou miskách byl stejný počet kuliček. Když jsme z první misky přendali 4 kuličky do druhé misky, bylo ve druhé misce třikrát tolik kuliček jako v první misce. Kolik kuliček bylo původně v první misce?

[Po přendání byla v první misce čtvrtina a ve druhé tři čtvrtiny všech kuliček, předtím v každé polovina. Přendané 4 kuličky tvoří čtvrtinu všech kuliček, tedy všech kuliček je 16 a v první misce jich původně bylo 8.]

D1. V každé ze čtyř misek máme stejný počet kuliček. Z první misky přesuneme polovinu kuliček do čtvrté misky a z druhé misky přesuneme dvě kuličky do třetí misky. Nyní

je v každé následující misce o stejný počet kuliček více než v předchozí misce. Kolik kuliček dohromady bylo ve všech miskách?

[Po přesunu je ve třetí misce o 4 kuličky více než ve druhé. Stejně se musí lišit počty kuliček v první a druhé misce, tedy z první misky jsme odebrali 6 kuliček. V první misce tak původně bylo $6 \cdot 2 = 12$ kuliček a ve všech miskách bylo dohromady $4 \cdot 12 = 48$ kuliček.]

D2. Sněhurka dala každému trpaslíkovi stejný počet kuliček. Trpaslíci házeli hrací kostkou. Kolik jim padlo teček, tolik kuliček museli vrátit Sněhurce. Každému ze šesti trpaslíků padl jiný počet teček. Kolik teček padlo sedmému trpaslíkovi, když trpaslíkům zbylo dohromady 46 kuliček? Kolik kuliček dala Sněhurka každému trpaslíkovi na začátku?

[Šest trpaslíků hodilo navzájem různá čísla, tedy 1, 2, 3, 4, 5 a 6, a vrátili dohromady 21 kuliček. Sedmý vrátil nejvýše 6 kuliček, takže Sněhurka rozdala nejméně $46 + 21 + 1 = 68$ a nejvýše $46 + 21 + 6 = 73$ kuliček. Toto číslo musí být dělitelné sedmi, jediné takové je 70, tedy každý trpaslík dostal $70 : 7 = 10$ kuliček. Sedmému trpaslíkovi padly $70 - 46 - 21 = 3$ tečky.[?]]

Z7–I–3

Ciferník čarodějných hodin má obvyklý tvar kruhu, ale neobvyklý počet hodin. Čísla hodin jsou rozmístěna rovnoměrně po obvodu kruhu, je jich více než 50 a méně než 80. Proti číslu 36 vzhledem ke středu ciferníku je číslo dělitelné pěti.

Kolik hodin mohou mít čarodějné hodiny? Určete všechny možnosti. *(M. Macko)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Uvažme ciferník běžných ručičkových hodin (s dvanácti hodinami). Která čísla leží proti číslům dělitelným pěti vzhledem ke středu ciferníku?

[Násobky pěti jsou 5 a 10. Proti nim leží 11 a 4.]

N2. Které číslo by bylo proti číslu 36 vzhledem ke středu ciferníku, kdyby čarodějné hodiny měly a) 40 hodin; b) 41 hodin; c) 42 hodin?

[a) Proti 40 leží $40 : 2 = 20$, proti 39 leží 19 atd., tedy proti 36 leží 16. b) Počet hodin je lichý, tedy žádná dvě čísla na ciferníku nejsou středově souměrná. c) Podobně jako v a) odvodíme, že proti 36 leží číslo 15.]

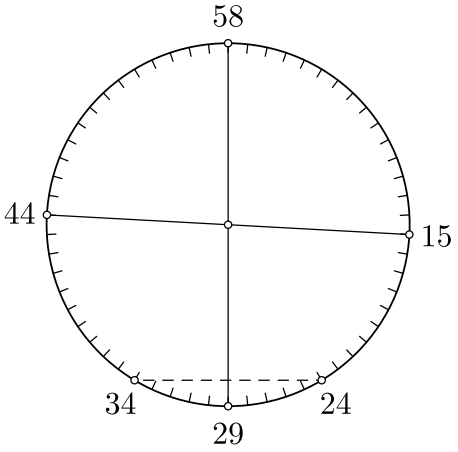
N3. Na obyčejných hodinách je úplně nahoře číslo 12, úplně vpravo 3, úplně dole 6 a úplně vlevo 9. Také na čarodějných hodinách je největší číslo úplně nahoře, vpravo od něj je 1 a ve stejném směru jako na obyčejných hodinách čísla přibývají. Kolik hodin by měly čarodějné hodiny, kdyby číslo 36 bylo a) úplně vpravo; b) úplně vlevo; c) druhé vpravo od čísla úplně dole; d) druhé vlevo od čísla úplně nahoře?

[a) Číslo 36 je ve čtvrtině, hodin je $36 \cdot 4 = 144$. b) Číslo 36 je ve třech čtvrtinách, hodin je $36 : 3 \cdot 4 = 48$. c) Úplně dole je $36 + 2 = 38$, hodin je $38 \cdot 2 = 76$. d) Úplně nahoře je $36 + 2 = 38$, což je počet hodin.]

[?] Převzato z 55. ročníku MO, úloha **Z6–II–3**.

D1. Na ciferníku elfích hodin jsou čísla 24 a 34 souměrná podle přímky procházející středem ciferníku a jeho největším číslem. Které číslo je středově souměrné s číslem 15 vzhledem ke středu ciferníku?

[Aritmetický průměr čísel 24 a 34 je 29. To je číslo na ose souměrnosti proti největšímu číslu, tedy největší číslo na ciferníku je $2 \cdot 29 = 58$. Proti číslu 15 je číslo $15 + 29 = 44$.]



Z7–I–4

Anna a Zina bydlí na stejné ulici. Jednou vyrazily současně proti sobě od svých domů, každá svojí konstantní rychlostí. Zina zjistila, že zapomněla mobil, v osmině vzdálenosti mezi oběma domy se otočila a vrátila se ke svému domu. Tam jí maminka mobil podala a Zina se ihned vydala původním směrem. Když se dívky potkaly, byly v polovině cesty mezi svými domy a od jejich současného startu uplynulo 15 minut.

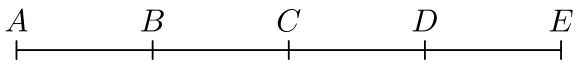
Za jak dlouho by se dívky potkaly, kdyby se Zina nevracela? *(M. Janičová)*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Z místa A vede do místa B cesta dlouhá 12 km, z místa B vede do místa C cesta dlouhá 24 km. Arnošt vyšel z A a současně proti němu vyšel Ctirad z C, každý svou stálou rychlostí. Setkali se uprostřed mezi místy B a C. Jak daleko od C by se setkali, kdyby Arnošt nevycházel z místa A, ale z místa B?

[Arnošt ušel $12 + 12 = 24$ km a Ctirad 12 km. Arnošt ušel dvojnásobek toho, co Ctirad neboli Arnošt je dvakrát rychlejší než Ctirad. Ze vzdálenosti 24 km mezi B a C by Ctirad ušel třetinu, tedy by se setkali 8 km od místa C.]

N2. Úsečka AE je body B, C, D rozdělena na čtyři stejně dlouhé úseky. Mravenec vyšel z bodu A do B a vrátil se zpět do A. Potom šel do C, zpět do A, pak do D, zpět do A a nakonec do E. Beruška šla rovnou z bodu A do bodu E. Kolikrát byla cesta berušky kratší než cesta mravence?



[Mravenec ušel $1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 = 16$ úseků, beruška jen 4 úseky. Beruška ušla čtyřikrát kratší vzdálenost.]

N3. Petr by za 5 minut ujel na kole $\frac{1}{6}$ trasy. Pěšky by za 40 minut ušel $\frac{1}{4}$ téže trasy. Vyrazil na kole, v polovině trasy píchl duši, a zbytek došel pěšky. Jak dlouho mu trvalo překonat celou trasu?

[Polovina jsou tři šestiny, resp. dvě čtvrtiny. Petr na kole jel $3 \cdot 5 = 15$ minut a pěšky šel $2 \cdot 40 = 80$ minut. Celou trasu překonal za 95 minut.]

N4. Želvy Žaneta a Žofie jsou sestry a žijí v jednom domě se zahradou. Žaneta potřebuje na ujití stejné dráhy o třetinu více času než Žofie.

a) Pokud Žofie obejde zahradu za 3 hodiny, za jak dlouho by ji obešla Žaneta?

b) Pokud Žaneta obejde dům za 2 hodiny, za jak dlouho by ho obešla Žofie?

c) Pokud má Žaneta ujít dráhu dvanáctkrát delší než Žofie, kolikrát více času bude potřebovat?

[Stejnou dráhu ujde Žaneta za $\frac{4}{3}$ doby Žofie, tj. Žofie za $\frac{3}{4}$ doby Žanety. a) Žaneta obejde zahradu za $\frac{4}{3} \cdot 3 = 4$ hodiny. b) Žofie obejde dům za $\frac{3}{4} \cdot 2 = 1{,}5$ hodiny. c) Žaneta bude potřebovat $12 \cdot \frac{4}{3} = 16$krát více času.]

Z7–I–5

Kolik je trojic číslic a, b, c takových, že dvojmístná čísla $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ac}$ a trojmístné číslo $\overline{abc}$ jsou všechna dělitelná třemi? *(P. Bak)*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Připomeňte si kritérium dělitelnosti třemi a rozhodněte, která z následujících čísel jsou dělitelná třemi:

$$44, \quad 555, \quad 6\,666, \quad 789.$$

[Stačí kontrolovat ciferné součty; dělitelná třemi jsou čísla 555, 6 666 a 789.]

N2. Kterou číslici v čísle a) 45 678; b) 5 678 910 můžeme odstranit, aby vzniklo číslo dělitelné třemi?

[Obě čísla jsou dělitelná třemi, tedy odstraněná číslice musí být dělitelná třemi. V prvním čísle je to jedině 6, ve druhém 6, 9, nebo 0.]

N3. Jakou hodnotu může mít číslice a, aby pětimístné číslo $\overline{647aa}$ bylo dělitelné třemi?

[Ciferný součet je dělitelný třemi pro $a = 2$, 5, nebo 8.]

N4. Je dána posloupnost čísel

$$1, \quad 12, \quad 123, \quad 1\,234, \quad 12\,345, \quad \ldots \quad 123\,456\,789.$$

Najděte v ní dvojice sousedních čísel, která jsou obě dělitelná třemi.

[Ciferné součty čísel posloupnosti jsou postupně 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36 a 45. Hledané dvojice jsou 12 a 123, 12 345 a 123 456, 12 345 678 a 123 456 789.]

D1. Kolik je dvojic číslic a, b takových, že sedmimístné číslo $\overline{ab05baa}$ je dělitelné třemi?

[Ciferný součet $3a + 2b + 5$ je dělitelný třemi, právě když je $2b + 5$ dělitelné třemi. Tedy číslice b může být 2, 5, nebo 8 a číslice a může být libovolná nenulová. Vyhovujících dvojic je $9 \cdot 3 = 27$.]

Z7–I–6

V daném obdélníku $ABCD$ leží na straně CD bod E tak, že úsečky AE a EC jsou shodné. Osa úsečky AE prochází bodem D a protíná úhlopříčku AC v bodě G.

Určete velikost úhlu DGC. *(M. Macko)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. V trojúhelníku ABC leží vrchol A na ose strany BC a platí a) $|\sphericalangle ABC| = 70°40'$; b) $|\sphericalangle CAB| = 70°40'$. Vypočítejte velikost úhlu BCA.

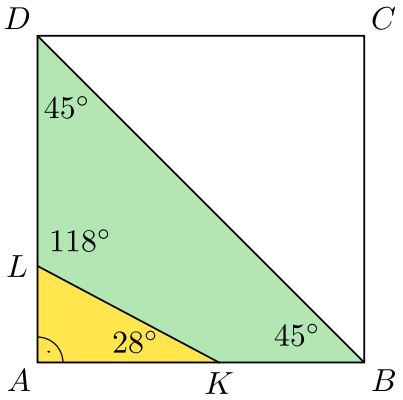
[Trojúhelník ABC je rovnoramenný se základnou BC, tedy vnitřní úhly u vrcholů B a C jsou shodné. Velikost úhlu BCA je a) $70°40'$; b) $(180° - 70°40') : 2 = 54°40'$.]

N2. Osa strany AB kosočtverce $ABCD$ prochází vrcholem D. Určete velikosti všech vnitřních úhlů kosočtverce $ABCD$.

[Trojúhelník ABD je rovnoramenný se základnou AB. Protože kosočtverec má všechny strany shodné, je trojúhelník ABD dokonce rovnostranný. Vnitřní úhly u vrcholů A a C mají velikost $60°$ a zbylé vnitřní úhly mají velikost $120°$.]

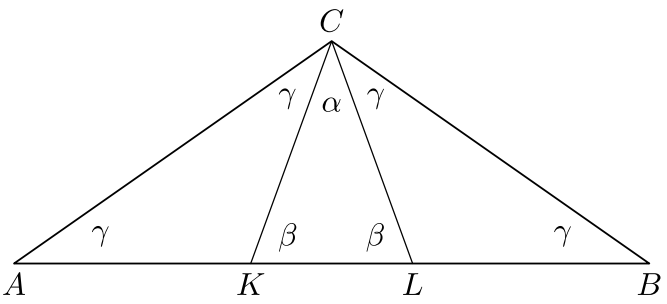
N3. V daném čtverci $ABCD$ leží na straně AB bod K a na straně AD bod L tak, že $|\sphericalangle AKL| = 28°$. Vypočítejte velikost úhlu DLK pomocí a) trojúhelníku AKL; b) čtyřúhelníku $KBDL$.

[Vychází $|\sphericalangle DLK| = 118°$, což lze zdůvodnit pomocí a) vztahu mezi vnějším úhlem a nepřiléhajícími vnitřními úhly trojúhelníku ($90° + 28° = 118°$); b) součtu vnitřních úhlů čtyřúhelníku ($360° - (180° - 28°) - 45° - 45° = 118°$).]



D1. V trojúhelníku ABC jsou na straně AB umístěny body K, L tak, že $|AK| = |KC| = |CL| = |LB|$, přičemž $|AK| < |AL|$ a $|\sphericalangle KCL| = 40°$. Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC.

[Trojúhelník KLC je rovnoramenný se základnou KL a trojúhelníky ACK a BCL jsou shodné rovnoramenné trojúhelníky se základnami AC a BC. Navzájem shodné úhly jsou na obrázku níže označeny stejnými symboly. Součet vnitřních úhlů trojúhelníku ABC je $\alpha + 4\gamma = 180°$. Ze zadání známe $\alpha = 40°$, tedy $\gamma = (180° - 40°) : 4 = 35°$. To jsou velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC u vrcholů A a B, vnitřní úhel u vrcholu C má velikost $\alpha + 2\gamma = 110°$.]


C
γ
α
γ
γ
β
β
γ
A
K
L
B