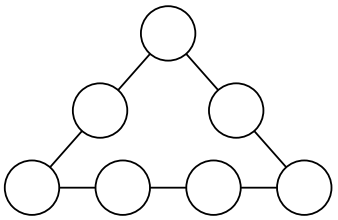
Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z6

Z6–I–1

Na stranách trojúhelníku je sedm prázdných kroužků jako na obrázku. Vepište do každého kroužku jedno přirozené číslo od 1 do 9 tak, aby žádné číslo nebylo použito vícekrát a aby součin čísel na všech stranách byl stejný.

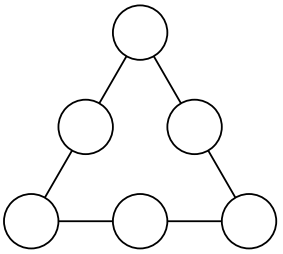
Která čísla mohou být na straně se čtyřmi kroužky?

(E. Novotná)



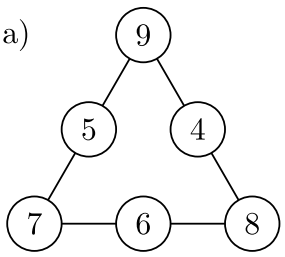
Návodné a doplňující úlohy

N1. Do kroužků na obrázku vepište některé z čísel 1 až 9 (každé nejvýše jednou) tak, aby součet čísel na všech stranách trojúhelníku byl stejný a současně a) co největší; b) co nejmenší.

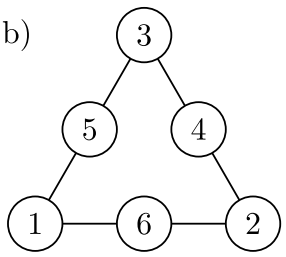


[Čísla ve vrcholech se započítávají dvakrát, ostatní jednou. Vyplnění s extrémními součty jsou na obrázcích níže.]

a)



b)

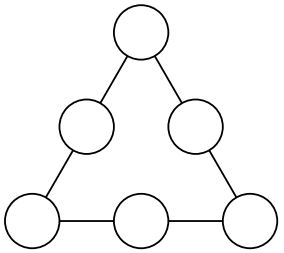


N2. Z přirozených čísel od 1 do 9 vyberte šest tak, aby je bylo možné rozdělit a) do dvou; b) do tří skupin se stejným součinem. Určete příslušné součiny.

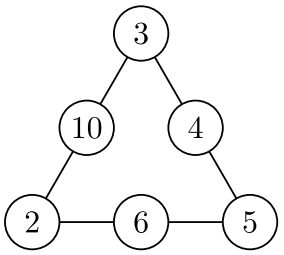
[V každé skupině musí být zastoupena stejná prvočísla ve stejném počtu. Tedy nelze použít 5, ani 7. V rozkladech zbylých čísel je sedmkrát 2 a čtyřikrát 3. a) Potřebujeme

vynechat 8, nebo 2; odpovídající součiny jsou $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 = 4 \cdot 9 = 36$, nebo $1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 = 8 \cdot 9 = 72$. b) Takové rozdělení není možné kvůli zastoupení prvočísla 3 (v každé skupině by muselo být právě jednou a objevuje se jen v číslech 3, 6 a 9, přičemž v devítce dvakrát).]

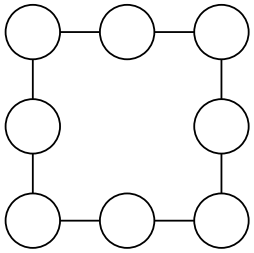
N3. Do kroužků na obrázku vepište různá přirozená čísla větší než 1 (každé nejvýše jednou) tak, aby součin na každé straně trojúhelníku byl 60.



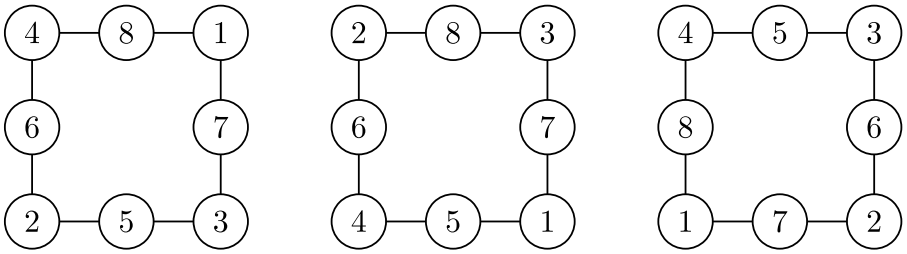
[Platí $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, tedy na každé straně musí být čísla složená z těchto činitelů. Až na otočení a překlopení je řešení jediné, viz obrázek níže.]



D1. Do kroužků na obrázku vepište čísla od 1 do 8 (každé právě jednou) tak, aby součty čísel na stranách čtverce byly čtyři po sobě jdoucí čísla a byly co nejmenší. Najděte alespoň tři vyhovující doplnění. Která čísla budou ve vrcholech čtverce?



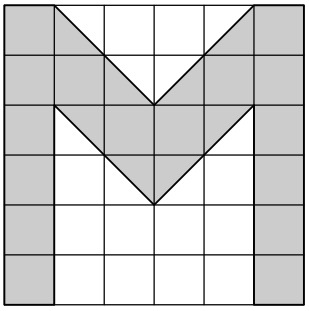
[Součet všech čtyř součtů na stranách je 36 (součet čísel od 1 do 8) plus ještě alespoň 10 (součet nejmenších čtyř čísel ve vrcholech, které se započítávají dvakrát), tj. alespoň 46. Čtyři po sobě jdoucí čísla se součtem 46 jsou 10, 11, 12, 13, tedy ve vrcholech musí být 1, 2, 3, 4. Tři z možných doplnění jsou na obrázku níže (celkem jich je až na otočení a překlopení 12).]



Z6–I–2

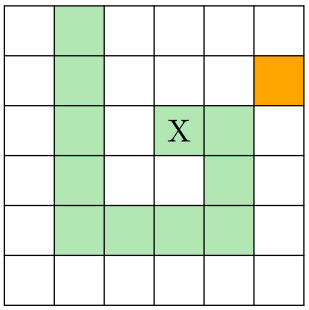
Viola ve čtvercové síti 6 cm × 6 cm *vybarvila útvar připomínající písmeno M jako na obrázku. Starší bratr Vilda poznamenal, že po vhodném otočení by útvar připomínal řecké písmeno* Σ *(velké sigma). Violu to zaujalo a otočený útvar nakreslila do stejné sítě přes ten původní, avšak jinou barvou.*

Určete obsah části sítě vybarvené oběma barvami. *(M. Macko)*

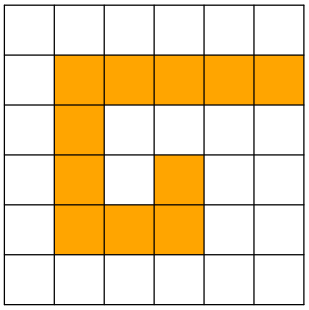


Návodné a doplňující úlohy

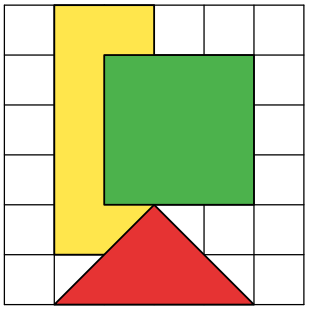
N1. Po hrací desce jako na obrázku se pohybovaly figurky. Zelená figurka vstoupila na krajní zelené pole a po polích této barvy se dostala na pole označené X. Druhá figurka vstoupila na oranžové pole a pohybovala se po hrací desce obdobně jako zelená figurka (stejné počty kroků i otočení). Vyznačte, po kterých polích šla oranžová figurka. Na kolik polí stouply obě figurky?



[Druhá figurka vykročila doleva, viz obrázek níže. Společných polí měly obě figurky 6.]

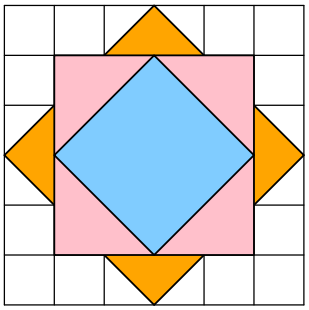


N2. Ve čtvercové síti o rozměrech 18 cm × 18 cm je umístěn zelený čtverec, žlutý obdélník a červený rovnoramenný trojúhelník jako na obrázku. Jaký je obsah části sítě, kterou pokrývá více než jeden z těchto tvarů?



[Čtverec a obdélník mají společná 3 pole, obdélník a trojúhelník půl pole, čtverec a trojúhelník žádné. Jedno pole má obsah 9 cm^2, tedy 3,5 sdílených polí má obsah 31,5 cm^2.]

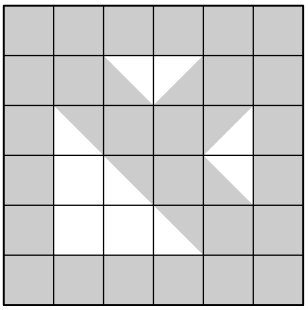
D1. Na podlaze vydlážděné čtvercovými dlaždicemi s obsahem 4 dm^2 jsou položeny tři čtvercové koberce jako na obrázku. Jak velký povrch podlahy zakrývají právě dva koberce?

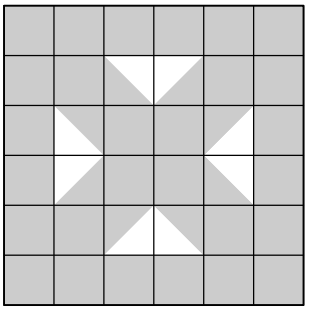


[Zajímá nás překryv oranžového a růžového koberce mimo oblast, kde je modrý koberec. Ten má obsah šesti dlaždic, tedy 24 dm^2.]

D2. Útvar ze soutěžní úlohy jsme třikrát po sobě otočili o čtvrt otáčky doprava kolem středu sítě a každý otočený útvar vybarvili do původní čtvercové sítě. Určete obsah části sítě, která zůstala nevybarvená.

[Výsledky po prvních dvou otočeních jsou znázorněny níže, při třetím otočení se už žádná nová pole nevybarví. Nevybarveno zůstalo osm polovin čtverečků, tedy 4 cm^2.]





Z6–I–3

Jedna čokoláda stojí několik eur a několik desítek centů. Za 10 eur můžeme koupit nanejvýš tři čokolády, za 15 eur nanejvýš pět čokolád, za 30 eur nanejvýš jedenáct čokolád a pokaždé by nám prodavač nějaké peníze vrátil.

Jaká může být cena jedné čokolády? Najděte všechny možnosti. *(M. Macko)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Zbyněk si chce koupit balení sušenek v automatu, který nevrací peníze. Jedno balení stojí 1,40 eura a Zbyněk má jen hodně jednoeurových mincí. Kolik nejvýše balení si může koupit za 9 eur? Kolik nejméně balení si musí koupit, aby mohl zaplatit přesně?

[Za 9 eur si může koupit nejvýše 6 balení (za 8,40 eura). Aby zaplatil přesně, musí si koupit nejméně 5 balení (za 7 eur).]

N2. Skupina kamarádů se snaží rozdělit do týmů pro hraní šifrovací hry. Dokázali by sestavit nejvýše čtyři týmy po třech hráčích, nebo nejvýše dva týmy po pěti hráčích, nebo nejvýše jeden tým po sedmi hráčích, ale pokaždé by někdo zůstal navíc. Kolik bylo ve skupině kamarádů?

[Z první podmínky plyne, že kamarádů bylo více než 12 a méně než 15, ze druhé, že jich bylo více než 10 a méně než 15, a ze třetí, že jich bylo více než 7 a méně než 14. Ve skupině bylo 13 kamarádů.]

N3. Sofiin pokoj má rozměry 4 m × 5 m. Na vzdálenost 4 m mezi pravou a levou stěnou Sofie udělá 5 stejně dlouhých kroků a zbyde jí kousek kratší než krok. Na vzdálenost 5 m mezi přední a zadní stěnou udělá 6 stejně dlouhých kroků a opět jí zbyde kousek kratší než krok. Jak dlouhý může být Sofiin krok, jestliže měří celý počet centimetrů? Najděte všechny možnosti.

[Z první podmínky plyne, že Sofiin krok měří nejméně 67 cm a nejvýše 79 cm, z druhé podmínky, že měří nejméně 72 cm a nejvýše 83 cm. Sofiin krok může měřit 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, nebo 79 cm.]

D1. Cena lanýže i pralinky je vyjádřena v celých desítkách centů a je menší než jedno euro. Za 2 eura by si Lída mohla koupit nejvýše 2 pralinky. Za 4 eura by si mohla koupit 1

pralinku a k ní nejvýše 5 lanýžů. Pokaždé by jí v obchodě nějaké peníze vrátili. Kolik stojí lanýž a kolik pralinka? Najděte všechny možnosti.

[Z první podmínky plyne, že pralinka mohla stát 0,70, nebo 0,80, nebo 0,90 eura. Ze 4 eur by Lídě na 5 lanýžů zůstalo 3,30, nebo 3,20, nebo 3,10 eura. V každém případě lanýž stojí 0,60 eura.]

Z6–I–4

Z následujících kartiček máme skládat desetinná čísla, jejichž zápis nezačíná nulou a za desetinnou čárkou je alespoň jedna číslice:



a) Ze všech kartiček složte dvě čísla s největším možným součtem.
b) Ze všech kartiček složte dvě čísla s nejmenším možným kladným rozdílem.

V obou případech určete všechny možné dvojice vyhovujících čísel. *(K. Pazourek)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Z čísel 52, 17, 8, 94, 36, 88 vyberte dvě, jejichž a) součet; b) rozdíl je největší možný.

[Největší možný součet mají čísla 94 a 88, největší rozdíl čísla 94 a 8.]

N2. Máme šest kartiček s čísly 52, 17, 8, 94, 36, 88. Přikládáním kartiček vedle sebe složte ze všech kartiček dvě čísla tak, aby byl jejich součet a) největší; b) nejmenší možný.

[a) Jedno číslo má být co nejdelší a začínat co největšími kartičkami. Největší součet je $9488523617+8 = 9488523625$. b) Obě čísla mají mít co nejméně číslic a začínat co nejmenšími kartičkami. Nejmenší součet je $175294 + 36888 = 212182$.]

N3. Z některých čtyř číslic 1, 4, 5, 6 a 9 složte dvě desetinná čísla menší než 10 s jedním desetinným místem tak, aby byl jejich a) součet; b) rozdíl největší možný.

[a) Na místě jednotek mají být co největší číslice 9 a 6, na místě desetin 5 a 4. Největší součet je $9{,}5 + 6{,}4 = 15{,}9$, případně vyjádřený jako $9{,}4 + 6{,}5 = 15{,}9$. b) Menšenec má být co největší a menšitel co nejmenší. Největší rozdíl je $9{,}6 - 1{,}4 = 8{,}2$.]

D1. Jirka měl v osudí 9 míčků označených číslicemi od 1 do 9. Vytáhl čtyři míčky a z jejich číslic složil dvě dvojmístná čísla s největším možným rozdílem, který byl 82. Jaká mohla být vzniklá dvojmístná čísla? Určete všechny možnosti.

[Menšenec byl tvořen dvěma největšími, menšitel dvěma nejmenšími taženými číslicemi. Tedy rozdíl číslic na místě desítek byl 8 (jedině 9 a 1) a na místě jednotek 2 (pět možností). Vzniklá čísla mohla být 98 a 16, nebo 97 a 15, nebo 96 a 14, nebo 95 a 13, nebo 94 a 12.]

Z6–I–5

V jistém trojúhelníku platí:

- *jedna strana měří 10 cm,*
- *délky dvou stran se liší o 4 cm,*
- *obvod je 32 cm.*

Najděte délky stran všech trojúhelníků s těmito vlastnostmi. *(M. Macko)*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Bohouš měl doma prkénka délek 3, 4, 5, 6, 7 a 8 decimetrů. Ze tří prkének chtěl sestavit výběh pro křečka ve tvaru trojúhelníku. Jaké trojice prkének nemohl použít?

[Nemohl použít trojice prkének o délkách $(3, 4, 7)$, $(3, 4, 8)$ a $(3, 5, 8)$: v žádné z nich není součet dvou kratších délek větší než délka třetí.]

N2. Maruška, Anička a Bára sbíraly třešně do společné misky. Anička dala do misky 16 třešní, počty třešní Báry a Marušky se lišily o 3 a nakonec bylo v misce 27 třešní. Kolik třešní dala do misky Maruška, jestliže sbírá třešně zásadně po dvou?

[Bára a Maruška daly do misky dohromady 11 třešní. Protože se jejich počty lišily o 3, musela jedna z nich dát do misky 7 třešní a druhá 4. Maruška sbírá třešně po dvou, dala tedy do misky 4 třešně.]

N3. Pat a Mat postavili ke své chatě tři schody, ale nepovedlo se jim udělat schody stejně vysoké. Dohromady měly výšku 1 metr, jeden ze schodů měřil 20 cm a dva se od sebe lišily o 10 centimetrů. Jaká mohla být výška nejvyššího schodu? Uveďte všechny možnosti.

[Rozlišíme, zda se o 10 cm liší schod o výšce 20 cm od jiného, nebo zbylé dva schody. Výšky schodů v cm mohly být 20, 10, 70, nebo 20, 30, 50, nebo 20, 35, 45. Nejvyšší schod mohl měřit 70, 50, nebo 45 cm.]

D1. Erika, Karel, Iva a Vojta se bavili o jistém trojúhelníku, jehož strany mají navzájem různé délky vyjádřené v centimetrech celými čísly:

- Erika: „Jedna strana měří 12 cm.“
- Karel: „Délky jedné dvojice stran se liší o 3 cm a délky jiné dvojice stran se také liší o 3 cm.“
- Iva: „Obvod trojúhelníku je mezi 44 a 50 cm.“
- Vojta: „Délky dvou stran jsou vyjádřeny lichými čísly.“

Jeden z kamarádů nemluví pravdu, ale Ivě a Karlovi určitě věřit můžeme. Jaké mohou být délky stran trojúhelníku?

[Podle Karla strany měří a, $a+3$ a $a+6$, kde a značí délku nejkratší strany v cm. Obvod $3a+9$ je dělitelný třemi, tedy podle Ivy je buď 45, nebo 48 cm. Pokud nemluví pravdu Erika, měří strany 13, 16 a 19 cm. Pokud nemluví pravdu Vojta, měří strany 12, 15 a 18 cm.]

Z6–I–6

V posluchárně je skupina žáků a lavice, z nichž každá má dvě místa. Kdyby se dívky posadily samostatně a chlapci po dvojicích, zbylo by 9 lavic neobsazených. Kdyby se chlapci posadili samostatně a dívky po dvojicích, zbylo by 12 lavic neobsazených. Kdyby všichni seděli po dvojicích, obsazených lavic by bylo stejně jako neobsazených.

Kolik lavic je v posluchárně? *(M. Macko)*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Ve třídě je 18 dvoumístných lavic. Na hodině matematiky je dnes 14 dívek a 10 chlapců. Kolik lavic by zůstalo volných, kdyby si sedli

a) všichni po dvojicích;
b) dívky po dvojicích a chlapci samostatně;
c) chlapci po dvojicích a dívky samostatně?

[a) Všichni po dvojicích obsadí 12 lavic, volných zůstane 6 lavic. b) Dívky obsadí 7 lavic a chlapci 10 lavic, volná zůstane 1 lavice. c) Chlapci obsadí 5 lavic a dívky 14 lavic, tedy 19 lavic. Takové usazení není možné, jedna lavice by chyběla.]

N2. Třída 3. B se přesunula na výuku do auly s dvoumístnými lavicemi. Když si všichni žáci sedli po dvojicích, bylo v aule o 9 neobsazených lavic víc, než když si sedl každý z nich sám. Když seděli všichni sami, zbývalo v aule 5 volných lavic. Kolik lavic je v aule?

[Rozdíl devíti neobsazených lavic znamená, že žáků bylo 18. Když seděli samostatně, zabírali 18 lavic a 5 bylo volných. V aule je 23 lavic.]

N3. Ve třídě s dvoumístnými lavicemi se dnes sešlo 32 dětí. Kdyby si každá dívka sedla s chlapcem a zbylí chlapci si sedli jednotlivě, bylo by obsazených lavic o 4 víc, než kdyby si všichni sedli po dvojicích. Kolik je ve třídě dívek a kolik chlapců?

[Chlapců je o 8 víc než dívek. Ve třídě je 12 dívek a 20 chlapců.]

D1. Marek dělal průzkum, jak lidé z jeho vesnice jezdí do práce. Zjistil, že někteří jezdí autobusem, někteří autem sami, někteří autem ve dvou a někteří autem ve třech. Kdyby všichni jeli autobusem, vyjelo by z vesnice o 13 aut méně a v autobuse by bylo o 24 lidí více. Kdyby si ti, kteří jezdí autem sami, přisedli k jiným do aut, vyjelo by stejně aut, jako kdyby ti, kteří jezdí autem ve dvou, jeli autobusem. Kolik lidí jezdí do práce autem ve dvou?

[Z první informace plyne, že ve 13 autech jezdí celkem 24 lidí. Ze druhé informace plyne, že aut s jedním člověkem je stejně jako aut se dvěma. Jediná možnost vychází tak, že je 5 aut s jedním, 5 aut se dvěma a 3 auta se třemi lidmi. Autem ve dvou jezdí 10 lidí.]

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z7

Z7–I–1

Je dán čtverec, který je složen z 52 nepřekrývajících se menších čtverců. Z nich 51 má obsah 1 cm^2 a zbylý čtverec má délku strany v centimetrech vyjádřenou přirozeným číslem.

Jaký obsah může mít daný čtverec? Určete všechny možnosti. *(E. Novotná)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Míša měla v krabici dílky skládačky, celkem 8 čtverců o straně 1 cm a 5 čtverců o straně 2 cm. Opakovaně z těchto dílků sestavovala čtverce. Jaké obsahy mohly mít sestavené čtverce? Najděte všechny možnosti.

[Lze sestavit čtverec o obsahu 1 cm^2, 4 cm^2, 9 cm^2 a 16 cm^2. Na čtverec s obsahem 25 cm^2 nemá Míša dost vhodných dílků a útvar s obsahem větším než 28 cm^2 ze svých dílků nesloží.]

N2. Máme obdélníkové dílky o rozměrech 3 cm × 5 cm. Jaký je obsah nejmenšího čtverce sestaveného z takových dílků?

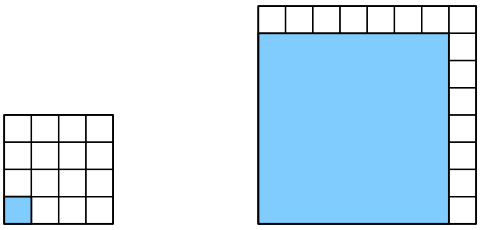
[Obsah čtverce je násobkem 15, nejmenší obsah je $15 \cdot 15 = 225$ cm^2. Takový čtverec poskládat lze: 5 dílků podél jedné strany, 3 podél druhé.]

N3. Máme obdélníkové dílky o rozměrech 4 cm × 6 cm. Jaký je obsah nejmenšího čtverce sestaveného z takových dílků?

[Obsah čtverce je násobkem 24, nejmenší takový obsah je $12 \cdot 12 = 6 \cdot 24 = 144$ cm^2. Takový čtverec poskládat lze: 3 dílky podél jedné strany, 2 podél druhé.]

N4. Strana čtverce je v centimetrech vyjádřena přirozeným číslem. Čtverec jsme doplnili 15 čtverečky o straně 1 cm na větší čtverec. Jakou stranu mohl mít původní čtverec? Najděte všechny možnosti.

[Rozdíl obsahů většího a menšího čtverce je 15 cm^2. Postupným zkoušením zjistíme, že původní čtverec mohl mít stranu 1 cm, nebo 7 cm ($1 \cdot 1 + 15 = 4 \cdot 4$, $7 \cdot 7 + 15 = 8 \cdot 8$).]



D1. Máme k dispozici pět čtvercových dílků o straně 1 cm, jeden čtvercový dílek o straně 2 cm a jeden čtvercový dílek o straně 3 cm. Kolika způsoby můžeme ze všech těchto dílků poskládat obdélník? Záleží jen na poloze čtvercových dílků v obdélníku. Dvě poskládání budeme považovat za stejná, pokud se dají na sebe převést otočením.

[Obsah obdélníku musí být $5 \cdot 1 + 4 + 9 = 18$ cm^2 a obě jeho strany musí měřit alespoň 3 cm. Jediný vyhovující obdélník má rozměry 3 cm a 6 cm. Možná poskládání jsou znázorněna na obrázku níže.]