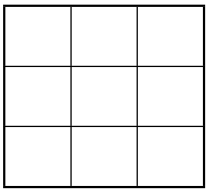
Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z5

Z5–I–1

Do políček tabulky 3×3 doplňte všechna přirozená čísla od 1 do 9 tak, aby:

- *součet čísel ve všech řádcích a sloupcích byl stejný,*
- *číslo 1 bylo hned vpravo od čísla 6,*
- *číslo 7 bylo hned vlevo od čísla 5,*
- *číslo 8 bylo hned nad číslem 3.*

Najděte všechny možnosti. *(K. Pazourek)*



Návodné a doplňující úlohy

N1. Součet tří různých přirozených čísel je roven 11. Jedno z těchto čísel je 7. Která čísla mohou být ta zbývající?

[Mohou to být pouze čísla 1 a 3.]

N2. Doplňte do tabulky chybějící čísla tak, aby součty čísel ve všech řádcích i sloupcích byly stejné:

11		2
		8
	3	9

[Součet čísel v řádku či sloupci je $2 + 8 + 9 = 19$. V prvním řádku chybí 6, ve třetím řádku 7, ve druhém řádku pak 1 a 10.]

N3. V řadě stojí přirozená čísla od 1 do 5 seřazená tak, že platí:

- Každá dvě sousední čísla se liší alespoň o dva.
- Číslo 5 stojí hned vpravo od čísla 3.
- Číslo 4 stojí hned vlevo od čísla 2.

V jakém pořadí může stát těchto pět čísel?

[Za sebou stojí čísla 3–5 a 4–2. Vpravo od čísla 2 nemůže být 1, ani 3, tedy 2 stojí úplně vpravo. Číslo 4 nemůže sousedit s 5, tedy 1 musí být před 4. Hledané pořadí je 3–5–1–4–2.]

N4. Do tabulky se třemi řádky a pěti sloupci máme vepsat přirozená čísla od 1 do 15 tak, aby součet čísel ve všech řádcích byl stejný a také součet čísel ve všech sloupcích byl stejný. Jaký bude součet čísel v každém řádku a jaký bude součet čísel v každém sloupci?

[Součet čísel od 1 do 15 je 120. Tedy součet čísel v každém řádku musí být $120 : 3 = 40$ a součet čísel v každém sloupci musí být $120 : 5 = 24$. To, že takové vyplnění existuje, ukazuje tabulka níže.]

14	2	15	4	5
9	10	6	7	8
1	12	3	13	11

D1. Mirka a Sandra vyplňovaly následující tabulku čísly:

		10		
		8		

Mirka vyplňovala čísla do horního řádku, Sandra do dolního.

Mirka řekla: „V mém řádku má každé číslo kromě prvního tu vlastnost, že když jej vynásobím číslem pod ním, dostanu číslo vlevo od něj.“

Sandra řekla: „V mém řádku je každé číslo kromě posledního o 3 větší než číslo napravo od něj.“

Doplňte tabulku podle těchto pravidel.

[Doplníme nejprve dolní řádek, poté horní.]

880	80	10	2	1
14	11	8	5	2

D2. Doplňte tabulku různými lichými čísly menšími než 32 tak, aby součet všech čísel v každém řádku, v každém sloupci i na každé úhlopříčce byl stejný.

	23		27
		15	
	5		9
17		29	7

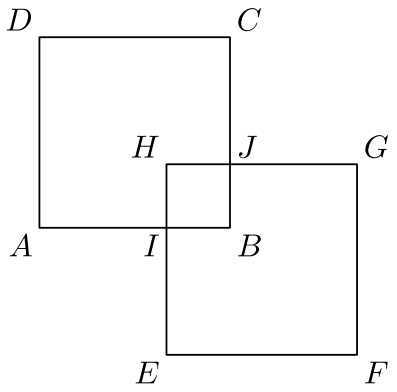
[Opakující se součet vidíme na jedné z úhlopříček: $27+15+5+17=64$. Odtud postupně doplníme chybějící čísla v posledním sloupci, v posledním řádku, ve druhém sloupci atd. Daná čísla byla lichá a součet je sudý, tedy při každém doplnění dostáváme liché číslo.]

13	23	1	27
3	25	15	21
31	5	19	9
17	11	29	7

Z5–I–2

Dva stejné čtverce $ABCD$ a $EFGH$ se překrývají jako na obrázku. Společný čtyřúhelník $IBJH$ je čtverec, jehož strana je třikrát kratší než strana AB. Obvod mnohoúhelníku $AIEFGJCD$ je 180 cm.

Určete obvod čtverce $ABCD$. *(E. Semerádová)*



NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

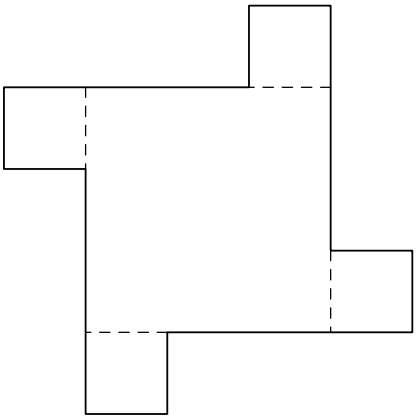
N1. Čtverec o obvodu 56 cm rozdělíme jednou úsečkou na dva stejné obdélníky. Určete obvod jednoho takového obdélníku.

[Strana čtverce měří $56:4=14$ cm, tedy strany obdélníku měří 14 cm a 7 cm. Obvod obdélníku je $2\cdot(14+7)=42$ cm.]

N2. Máme tři špejle, každá je dlouhá 32 cm. Slepíme je do dlouhé tyčky izolepou tak, že dvě sousední špejle se překrývají čtvrtinami svých délek. Jak dlouhá je výsledná tyčka?

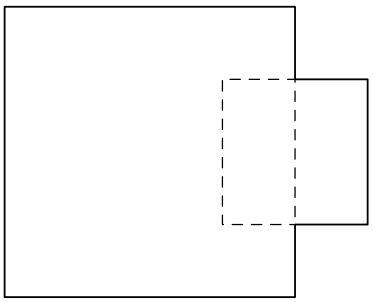
[Délka překryvu dvou špejlí je $32:4=8$ cm. Tedy délka tyčky je $3\cdot 32-2\cdot 8=80$ cm.]

N3. Na obrázku je útvar tvořený jedním velkým a čtyřmi menšími čtverci. Strana každého z menších čtverců je třikrát kratší než strana velkého čtverce. Obvod útvaru je 60 cm. Určete obvod velkého čtverce.



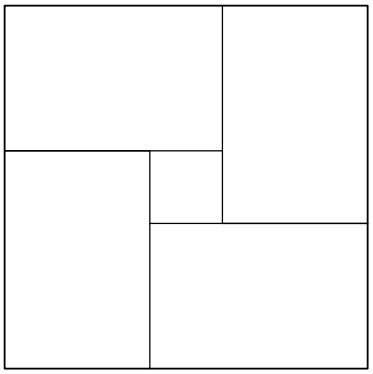
[Obvod celého útvaru lze rozdělit na čtyři stejné části omezené vrcholy velkého čtverce. Každá z těchto částí odpovídá $3 + 2 = 5$ stranám malého čtverce a měří $60 : 4 = 15\,\text{cm}$. Tedy strana malého čtverce měří $15 : 5 = 3\,\text{cm}$ a strana velkého čtverce $3 \cdot 3 = 9\,\text{cm}$. Obvod velkého čtverce je $4 \cdot 9 = 36\,\text{cm}$.]

N4. Na obrázku je útvar složený ze dvou překrývajících se čtverců, přičemž větší z nich má stranu dvakrát delší než menší čtverec. Strany čtverců jsou rovnoběžné a střed malého čtverce leží ve středu strany velkého čtverce. Obvod celého útvaru je 90 cm. Určete obvod malého čtverce.



[Zvolme si polovinu strany malého čtverce jako jednotkovou úsečku. Pak strana většího čtverce odpovídá 4 jednotkovým úsečkám a obvod celého útvaru 18. Tedy jedna jednotková úsečka měří $90 : 18 = 5\,\text{cm}$, strana malého čtverce $2 \cdot 5 = 10\,\text{cm}$ a jeho obvod $4 \cdot 10 = 40\,\text{cm}$.]

D1. Na obrázku je čtvercová dlaždice se stranou délky 10 dm, která je složena ze čtyř shodných obdélníků a malého čtverce. Obvod malého čtverce je pětkrát kratší než obvod celé dlaždice. Určete rozměry obdélníků.



[Strana malého čtverce měří $10 : 5 = 2$ dm. Delší strana obdélníku je o 2 dm delší než jeho kratší strana a dohromady měří 10 dm. Rozměry obdélníků jsou 4 dm a 6 dm.[?]]

Z5–I–3

Výpravčí na vlakovém nádraží choval pět zvířat: žirafu, pštrosa, paviána, papouška a boxera. Každý den od pondělí do pátku vítalo cestující jedno z těchto zvířat:

- *pštros nevítal v pondělí, ani v pátek,*
- *pavián vítal hned následující den po žirafě,*
- *žirafa nevítala ve středu,*
- *papoušek vítal později v týdnu než žirafa,*
- *boxer první tři dny po víkendu nevítal.*

Které zvíře vítalo cestující v úterý? *(P. Antošová)*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Pan Řepa jedl v pondělí, úterý, středu a čtvrtek každý den jiné ovoce: jablka, hrušky, třešně a banány. Jablka jedl v úterý. Hrušky nejedl ve středu. Třešně jedl ve čtvrtek. Kdy pan Řepa jedl banány?

[Hrušky mohl jíst pouze v pondělí, tedy banány jedl ve středu.]

N2. Petr, Radek, Standa a Tomáš spolu závodili. Petr doběhl mezi Radkem a Standou. Tomáš doběhl mezi Petrem a Radkem. Kdo z nich mohl zvítězit? Najděte všechny možnosti.

[Zvítězit mohl Radek, nebo Standa.]

N3. Honza měl tři klece (černou, stříbrnou, zlatou) a tři zvířata (morče, potkana a tchoře). V každé kleci bylo jedno zvíře. Zlatá klec stála nalevo od černé klece. Stříbrná klec stála napravo od klece s morčetem. Potkan byl v kleci napravo od stříbrné klece. Určete, v které kleci bylo které zvíře.

[Stříbrná klec nemohla stát na krajích, tedy byla uprostřed. Zlatá klec stála nalevo od černé, tedy pořadí bylo: zlatá, stříbrná, černá. Zvířata v klecích byla postupně: morče, tchoř, potkan.[?]]

[?] Převzato ze 66. ročníku MO, úloha **Z5–I–3**.
[?] Převzato ze 67. ročníku MO, úloha **Z5–I–2**.

D1. Pan režisér Alík potřeboval do televizní pohádky čtyři psy. Dostal nabídku z Řecka, Belgie, Irska a z Dolní Lhoty. Vybral ovčáka, dalmatina, vlkodava a jezevčíka, každého z jiné země, s různým jménem a různým věkem.

- Nejstarší ze psů byl jezevčík, bylo mu 5 let.
- Bucki byl z nich druhý nejmladší.
- Vlkodav pocházel z Irska.
- Pes z Dolní Lhoty se jmenoval Punťa.
- Oddi oslavil včera své čtvrté narozeniny.
- Ovčák pocházel z Belgie.
- Rubby nebyl dalmatin.
- Vlkodav měl tři roky.
- Nejmladší z vybraných psů byl Rubby, byly mu dva roky.

Zjistěte, jak se každý vybraný pes jmenoval, odkud pocházel, jaké byl rasy a kolik mu bylo let.

[Rubbymu byly 2 roky, vlkodavovi (tedy Buckimu) 3, Oddimu 4 a jezevčíkovi 5 let. Jezevčík se tedy jmenoval Punťa a byl z Dolní Lhoty. Rubby nebyl dalmatin, byl to tedy ovčák z Belgie, a Oddi byl dalmatin z Řecka. Bucki byl vlkodav z Irska.[?]]

Z5–I–4

Heslo k trezoru je ukryto ve slově $HUMBUK$. Různá písmena zastupují různé číslice, stejná písmena zastupují stejné číslice a platí tyto vztahy:

$$H + U = 9, \quad M \cdot B = 12, \quad B - U = 2, \quad U > M, \quad H - K = 5.$$

Najděte heslo k trezoru. *(E. Novotná)*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Najděte všechny dvojice navzájem různých čísel od 0 do 9 takových, že jejich a) součet je 13; b) součin je 8; c) rozdíl je 8; d) součet je 14.

[a) 9 a 4, nebo 8 a 5, nebo 7 a 6; b) 8 a 1, nebo 4 a 2; c) 9 a 1, nebo 8 a 0; d) 9 a 5, nebo 8 a 6 (dvojice 7 a 7 nevyhovuje).]

N2. Máme 3 krabičky, každá je označena jedním písmenem A, B, nebo C. V každé krabičce je schováno jedno číslo. V krabičce A je číslo o 5 větší než číslo v krabičce B. V krabičce C je číslo o 2 větší než číslo v krabičce B. Číslo v krabičce A je jedenácté nejmenší dvojmístné číslo. Která čísla jsou v jednotlivých krabičkách?

[V krabičce A je 20, v krabičce B je 15 a v krabičce C je 17.]

N3. V zápise $KLID$ představuje každé písmeno jinou číslici. Číslice jsou podle velikosti seřazeny stejně jako jim příslušná písmena v abecedě. Hodnota jedné číslice je rovna

[?] Převzato ze 70. ročníku MO, úloha **Z5–I–3**.

součinu všech ostatních tří číslic. Také platí, že jedna číslice je o 6 menší než jiná číslice. Určete číslo $KLID$.

[Žádná číslice nemůže být 0, neboť součin by byl 0. Nenulové dvojice číslic s rozdílem 6 jsou 1 a 7, nebo 2 a 8, nebo 3 a 9. Součinem tří číslic musí být největší číslice L a jediná vyhovující možnost je $L = 8 = 1 \cdot 2 \cdot 4$. Tedy číslo $KLID$ je 4821.]

D1. V následujícím algebrogramu stejná písmena znamenají stejné číslice, různá písmena různé číslice. Určete číslice A, B a C, aby platilo:

$$AAA + BB + C = 419$$

[Číslo AAA je menší než 419 a větší než $419 - 99 - 9 = 311$, tedy $A = 3$. Potom $BB + C = 419 - 333 = 86$, odkud dostaneme $B = 7$ a $C = 9$.]

Z5–I–5

Xavier, Yvona a Zina sbírají karty pokémonů. Xavier jich má dvakrát více než Zina. Yvona má třetinu Xavierova počtu karet. Některé dvě z dětí mají dohromady rovných 100 karet.

Kolik karet mají všichni tři dohromady? *(M. Janičová)*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Janek, Kamil a Lída šli na houby, dohromady jich našli 50. Kamil našel dvakrát tolik hub, co Janek. Lída jich našla 23. Kolik hub našel Janek a kolik Kamil?

[Janek s Kamilem našli $50 - 23 = 27$ hub. Protože jich Janek našel dvakrát méně než Kamil, musel jich najít třetinu z 27 a Kamil dvě třetiny z 27. Tedy Janek našel 9 hub a Kamil 18 hub.]

N2. Kabel nabíječky mobilu je dvakrát kratší než kabel od mikrovlnky. Kabel od sekačky trávy je dlouhý jako tři kabely od nabíječky a dva kabely od mikrovlnky dohromady. Kolikrát je kabel od sekačky delší než kabel od nabíječky?

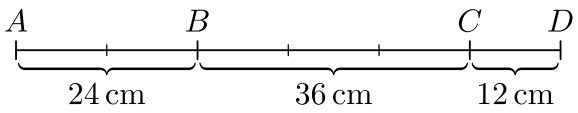
[Vzhledem k nabíječce od mobilu je kabel od mikrovlnky dvakrát delší, tedy kabel od sekačky je 7krát delší ($3 + 2 \cdot 2 = 7$).]

N3. Adam má pětkrát více kuliček než Bára a ta má třikrát méně kuliček než Cyril. Mohou mít všichni dohromady 60 kuliček?

[Cyril má třikrát více kuliček než Bára a všichni dohromady mají devítinásobek počtu Bářiných kuliček ($1 + 3 + 5 = 9$). Číslo 60 není násobkem devíti, tedy 60 kuliček dohromady mít nemohou.]

D1. Na úsečce AD jsou umístěny body B a C tak, že bod B leží ve třetině úsečky AD blíže bodu A a bod C leží ve čtvrtině úsečky BD blíže bodu D. Délka úsečky BC je 36 cm. Jak dlouhá je úsečka AD?

[Bod C odděluje čtvrtinu z úsečky BD, tedy BC tvoří tři čtvrtiny úsečky BD neboli CD je třikrát kratší než BC. Odtud $|CD| = 36 : 3 = 12\,\text{cm}$ a $|BD| = |BC| + |CD| = 36 + 12 = 48\,\text{cm}$. Podobně BD tvoří dvě třetiny AD, tedy $|AB| = |BD| : 2 = 24\,\text{cm}$. Délka úsečky AD je $24 + 48 = 72\,\text{cm}$.]



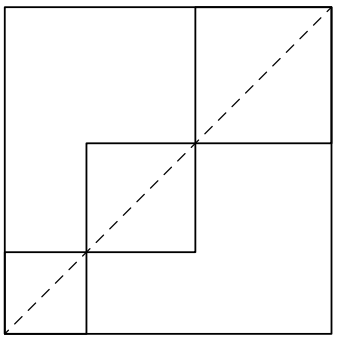
Z5–I–6

Marek měl sadu čtverců s délkami stran v centimetrech vyjádřených všemi přirozenými čísly od 1 do 9. Čtverce vybíral a skládal podle následujících pravidel:

- *do největšího vybraného čtverce vložil několik menších čtverců,*
- *délky stran menších čtverců v centimetrech byly po sobě jdoucí čísla,*
- *žádné dva menší čtverce se nepřekrývaly,*
- *úhlopříčky menších čtverců ležely na úhlopříčce velkého čtverce a celou ji pokrývaly.*

Jaké délky stran mohly mít čtverce v Markově útvaru? Najděte všechny možnosti.

(M. Macko)



Návodné a doplňující úlohy

N1. Zapište číslo 9 jako součet několika po sobě jdoucích přirozených čísel. Najděte všechna řešení.

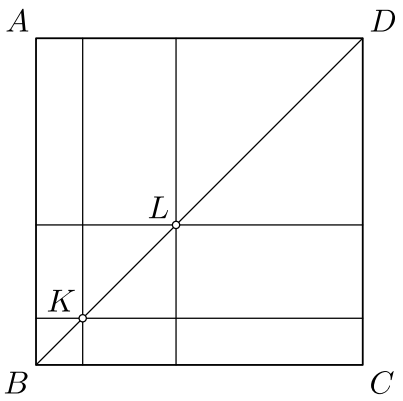
[Jediné možnosti jsou $4 + 5$ nebo $2 + 3 + 4$.]

N2. Je dán čtverec o straně 6 cm a na jeho úhlopříčce několik menších čtverců jako v soutěžní úloze, tj. sousední čtverce se dotýkají vrcholem a délky stran sousedních čtverců v cm jsou celočíselné a postupně se zvětšují o 1 cm. Jaké délky stran mohou mít tyto čtverce? Najděte všechny možnosti.

[Vyhovuje pouze trojice čtverců se stranami délek 1 cm, 2 cm a 3 cm.]

N3. Je dán čtverec $ABCD$ o straně 7 cm. Na jeho úhlopříčce BD sestrojte body K a L tak, aby úsečky BK, KL a LD byly úhlopříčkami čtverců o stranách 1 cm, 2 cm a 4 cm.

[Stačí některou ze stran čtverce rozdělit na úseky délek 1 cm, 2 cm a 4 cm a poté pomocí kolmic sestrojit body K a L na úhlopříčce, viz obrázek níže.]



D1. Je dán čtverec o straně 10 cm a na jeho úhlopříčce a) dva; b) pět; c) libovolný počet čtverců, které na sebe navazují úhlopříčkami jako v soutěžní úloze. Délky stran těchto čtverců mohou být libovolné. Určete součet obvodů takto vložených čtverců.

[Kolmé průměty stran vložených čtverců na strany velkého čtverce pokryjí obvod tohoto čtverce, viz obrázek výše. Tedy součet obvodů vložených čtverců je roven obvodu daného čtverce, tj. 40 cm.]