

Zadání úloh domácího kola

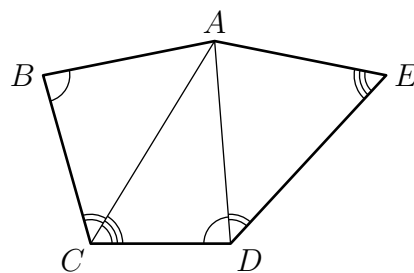
Kategorie A

1. Okolo kulatého stolu sedí 76 rytířů. Každý z nich má právě čtyři spojence, a to dva nejbližší sousedy po levici a dva nejbližší sousedy po pravici. Kolika způsoby lze rytíře rozdělit do dvou skupin, aby každý rytíř měl ve své skupině právě dva spojence?
(Jozef Rajník)
2. Každá ze tří přímek dělí daný kruh na dvě úseče, jejichž obsahy jsou v poměru 2 : 1. Tato trojice přímek dělí kruh na sedm částí. Dokažte, že obsah některé části je roven součtu obsahů jiných dvou nebo tří (různých) částí.
(Tomáš Bárta)
3. V trojúhelníku ABC jsou střed kružnice vepsané a těžiště stejně vzdálené od přímky BC . Dokažte, že poloměr kružnice připsané straně BC je roven velikosti výšky z vrcholu A . (Kružnice připsaná straně BC je kružnice, která se dotýká strany BC a polopřímek opačných k BA a CA .)
(Zdeněk Pezlar)
4. Najděte všechny dvojice prvočísel p, q takové, že $p > q$ a platí

$$(p + q + 1)(n(p - 1, q - 1) + 1) = 11pq.$$

Zde $n(a, b)$ označuje nejmenší společný násobek čísel a a b .
(Tomáš Jurík)

5. V konvexním pětiúhelníku $ABCDE$ platí $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle ADC|$, $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle EDA|$ a $|\sphericalangle AED| = |\sphericalangle DCA|$. Dokažte, že $CD \parallel BE$.
(Patrik Bak)



6. Pro kladné celé číslo m označme $g(m)$ nejmenší počet geometrických posloupností, mezi jejichž členy jsou zastoupeny všechny dělitele čísla m . Určete všechna kladná celá čísla n , pro která platí $g(n!) = g((n + 1)!)$. Řešte pro geometrické posloupnosti a) s racionálními kvocienty, b) s reálnými kvocienty.
(Zdeněk Pezlar)



Do soutěže se přihlaste na osmo.matematickaolympiada.cz

Informace o soutěži včetně návodných úloh najdete na
matematickaolympiada.cz

