II. kolo kategorie Z8

Z8–II–1

Mirek zapomněl kód k otevření dveří, ale ví, že platí:

- kód je trojmístné číslo dělitelné třemi,
- kód sestává z navzájem různých číslic od 1 do 9,
- součet použitých číslic je menší než 17,
- s číslem 419 nemá kód společnou žádnou číslici,
- s číslem 761 má kód společnou jednu číslici, ale na jiném místě,
- s číslem 361 má kód společnou jednu číslici, ale na jiném místě.

Jaké kódy přicházejí v úvahu? Najděte všechny kódy vyhovující uvedeným podmínkám. (*M. Smitková*)

Možné řešení. Podle čtvrté podmínky nemá kód žádnou společnou číslici s číslem 419. To spolu s druhou podmínkou znamená, že použitelné číslice jsou 2, 3, 5, 6, 7 a 8.

Podle první a třetí podmínky je ciferný součet kódu dělitelný třemi a menší než 17. Protože nejmenší součet použitelných číslic je $2 + 3 + 5 = 10$, možné ciferné součty jsou 12 a 15. Tyto součty lze z použitelných číslic získat jedině takto:

$$2 + 3 + 7 = 12, \quad 2 + 5 + 8 = 15, \quad 2 + 6 + 7 = 15, \quad 3 + 5 + 7 = 15.$$

Z páté a šesté podmínky plyne, že kód buď obsahuje 6 a neobsahuje ani 7, ani 3, nebo neobsahuje 6 a obsahuje 7 i 3. Z vypsaných možností tomuto požadavku vyhovují trojice číslic

$$2, 3, 7 \quad \text{a} \quad 3, 5, 7$$

Podle páté a šesté podmínky také víme, že číslice 3 a 7 nemohou být na prvním místě.

Dohromady zjišťujeme, že všechny možné kódy jsou

$$237, \quad 273, \quad 537, \quad 573.$$

Hodnocení. 1 bod za šest použitelných číslic; 1 bod za dva možné součty číslic; po 1 bodu za každou vyhovující trojici číslic; po 1 bodu za každou vyhovující dvojici kódů.

Řešení založená na zkoušení možností hodnoťte podle úplnosti postupu a komentáře.

Z8–II–2

Určete největší trojmístné číslo takové, že po připsání stejné nenulové číslice na jeho začátek i konec vznikne pětimístné číslo, které je 83krát větší než původní číslo. (*P. Bak*)

Možné řešení. Označme hledané trojmístné číslo n a připsanou číslici p. Podle zadání má platit

$$10000p + 10n + p = 83n.$$

To po úpravě vede k podmínce $10001p = 73n$, odkud po vydělení dostáváme

$$n = 137p.$$

Hledáme největší trojmístné číslo n, které je násobkem čísla 137. Takové číslo je $959 = 137 \cdot 7$ (číslo $137 \cdot 8 = 1096$ už není trojmístné).

Největší vyhovující číslo je 959.

Poznámka. Největší možný součin trojmístného čísla s číslem 83 je jistě menší než 83000, tedy připsaná číslice p je nanejvýš 8. Postupně pro $p = 8, 7, \ldots$ můžeme úlohu zkoušet dořešit jako algebrogram.

- Pro $p = 8$ postupně (odzadu) odvozujeme:

$$\begin{array}{rrrrr} & & a & b & c \\ \times & & & 8 & 3 \\ \hline & * & * & * & * \\ * & * & * & * & \\ \hline 8 & a & b & c & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} & & a & b & 6 \\ \times & & & 8 & 3 \\ \hline & * & * & * & 8 \\ * & * & * & 8 & \\ \hline 8 & a & b & 6 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} & & a & 9 & 6 \\ \times & & & 8 & 3 \\ \hline & * & * & 8 & 8 \\ * & * & 6 & 8 & \\ \hline 8 & a & 9 & 6 & 8 \end{array}$$

  Poslední výpočet však dál doplnit nejde (pro žádné doplnění nebude stejná číslice a na místě stovek v činiteli i na místě tisíců ve výsledku).

- Pro $p = 7$ postupně (odzadu) odvozujeme:

$$\begin{array}{rrrrr} & & a & b & c \\ \times & & & 8 & 3 \\ \hline & * & * & * & * \\ * & * & * & * & \\ \hline 7 & a & b & c & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} & & a & b & 9 \\ \times & & & 8 & 3 \\ \hline & * & * & * & 7 \\ * & * & * & 2 & \\ \hline 7 & a & b & 9 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} & & a & 5 & 9 \\ \times & & & 8 & 3 \\ \hline & * & * & 7 & 7 \\ * & * & 7 & 2 & \\ \hline 7 & a & 5 & 9 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} & & 9 & 5 & 9 \\ \times & & & 8 & 3 \\ \hline & 2 & 8 & 7 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 2 & \\ \hline 7 & 9 & 5 & 9 & 7 \end{array}$$

  Největší vyhovující číslo je 959.

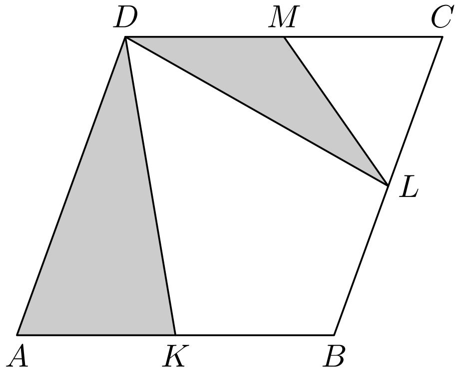
Hodnocení. 2 body za formulaci problému pomocí neznámé či algebrogramu; 2 body za výsledek; 2 body za srozumitelnost a kvalitu komentáře.

Z8–II–3

Kosočtverec $ABCD$ má obsah $120\,\mathrm{cm}^2$ a velikost úhlu BAD je $70°$. Body K, L a M jsou po řadě středy stran AB, BC a CD.

Určete součet obsahů trojúhelníků AKD a DLM. (*K. Pazourek*)

Možné řešení. Znázornění zadané situace je následující:



Obsah kosočtverce lze vyjádřit jako

$$S_{ABCD} = a \cdot v = 120\,\mathrm{cm}^2,$$

kde a je velikost jeho strany a v velikost výšky.

Strana AK trojúhelníku AKB je poloviční vzhledem ke straně a a odpovídající výška je stejná jako výška v. Obsah tohoto trojúhelníku je

$$S_{AKD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot v = \frac{1}{4} S_{ABCD} = 30\,\mathrm{cm}^2,$$

Strana DM trojúhelníku DLM je poloviční vzhledem ke straně a a odpovídající výška je poloviční vzhledem k výšce v. Obsah tohoto trojúhelníku je

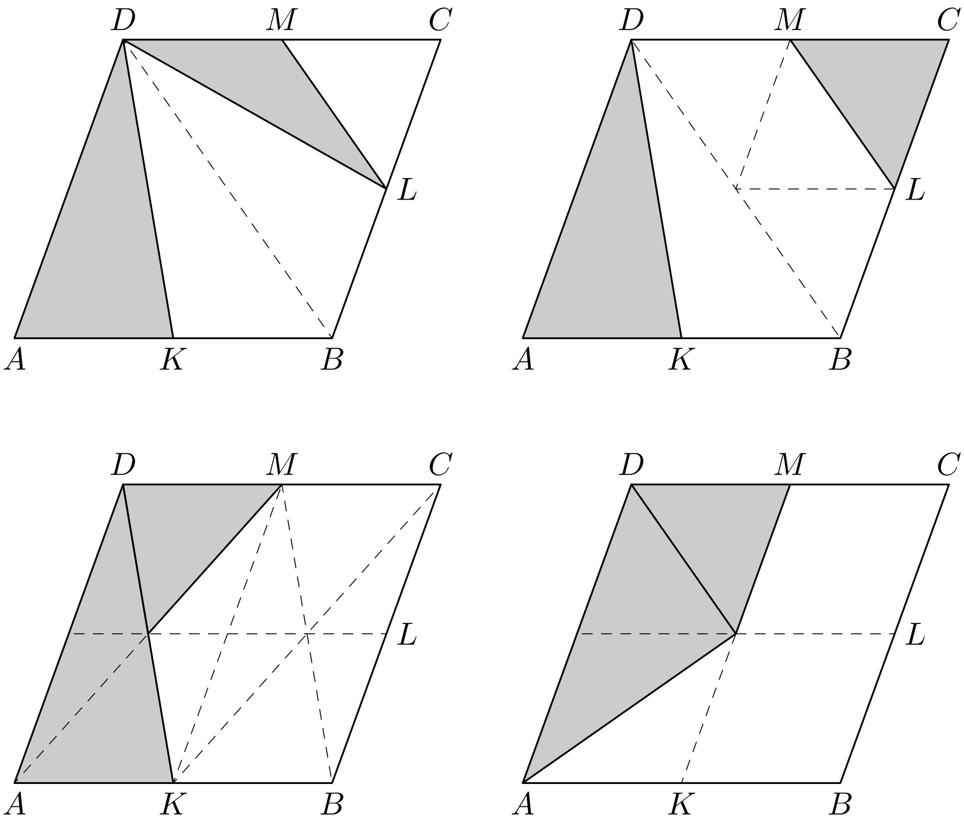
$$S_{DLM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{v}{2} = \frac{1}{8} S_{ABCD} = 15\,\mathrm{cm}^2.$$

Součet obsahů trojúhelníků AKD a DLM je

$$S_{AKD} + S_{DLM} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) S_{ABCD} = \frac{3}{8} S_{ABCD} = 45\,\mathrm{cm}^2. \qquad (*)$$

Poznámky. Údaj o velikosti úhlu BAD je nadbytečný (souvisí se vztahem mezi velikostmi a a v, který však k dořešení úlohy není třeba).

Vztahy mezi obsahem kosočtverce a obsahy dílčích trojúhelníků lze chápat a znázornit různými způsoby. Viz např. následující transformace zachovávající obsahy či doplnění pomocných úseček pro porovnání částí:



Hodnocení. 1 bod za znázornění, dílčí postřehy či transformace; 1 bod za obsah trojúhelníku AKD; 2 body za obsah trojúhelníku DLM a součet; 2 body za srozumitelnost a kvalitu komentáře.