II. kolo kategorie Z7

Z7–II–1

V následujících příkladech na písemné odčítání desetinných čísel odpovídají různá písmena různým číslicím, stejná stejným:

$$\begin{array}{r} AB{,}C\,D \\ -\quad C{,}D\,A\,B \\ \hline 3\,5{,}\,6\;6\;7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} BC{,}D\,A \\ -\quad A{,}B\,C\,D \\ \hline 3\,3{,}\,7\;5\;9 \end{array}$$

Nahraďte písmena číslicemi tak, aby byl výpočet správný. (*K. Pazourek*)

Možné řešení. U obou menšenců si na místě tisícin doplníme nulu a při odhalování neznámých číslic budeme postupovat od nejnižších řádů (zprava doleva).

Z posledních číslic (řád tisícin) obou výsledků určíme hodnoty B a D. V obou případech počítáme s přechodem přes desítku a vychází $B = 3$ a $D = 1$. Po dosazení vypadají příklady takto:

$$\begin{array}{r} A\,3{,}\,C\;1\;0 \\ -\quad C{,}\,1\;A\;3 \\ \hline 3\,5{,}\,6\;6\;7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\,C{,}\,1\;A\;0 \\ -\quad A{,}\,3\;C\;1 \\ \hline 3\,3{,}\,7\;5\;9 \end{array}$$

Z předposlední číslice (řád setin) prvního výsledku určíme, opět s přechodem přes desítku, hodnotu $A = 4$. Po dosazení vypadají příklady takto:

$$\begin{array}{r} 4\,3{,}\,C\;1\;0 \\ -\quad C{,}\,1\;4\;3 \\ \hline 3\,5{,}\,6\;6\;7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\,C{,}\,1\;4\;0 \\ -\quad 4{,}\,3\;C\;1 \\ \hline 3\,3{,}\,7\;5\;9 \end{array}$$

Z předposlední číslice (řád setin) druhého výsledku určíme, opět s přechodem přes desítku, hodnotu $C = 8$. Tak máme určeny všechny neznámé číslice. Po dosazení musíme ověřit, že výpočty sedí i na místech, které jsme do předchozích úvah nezahrnuli:

$$\begin{array}{r} 4\,3{,}\,8\;1\;0 \\ -\quad 8{,}\,1\;4\;3 \\ \hline 3\,5{,}\,6\;6\;7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\,8{,}\,1\;4\;0 \\ -\quad 4{,}\,3\;8\;1 \\ \hline 3\,3{,}\,7\;5\;9 \end{array}$$

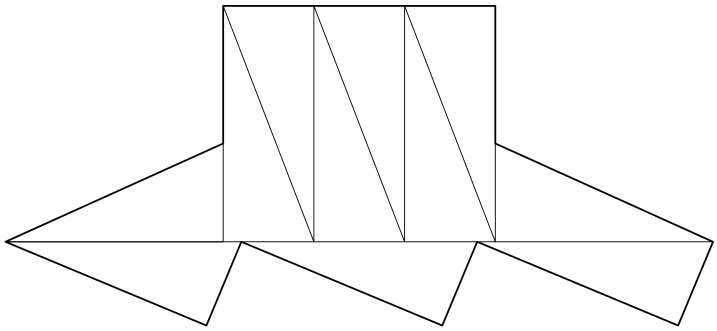
Oba výpočty jsou v pořádku. Uvedené nahrazení písmen číslicemi je jediné možné.

Hodnocení. 2 body za první dvě číslice; 2 body za zbylé dvě číslice; 1 bod za ověření správnosti obou výpočtů; 1 bod za kvalitu komentáře.

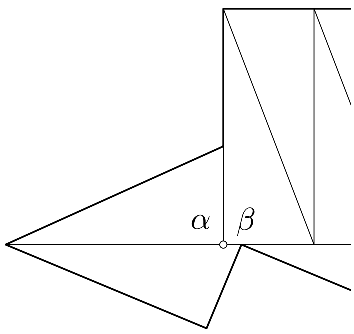
Z7–II–2

Mnohoúhelník na obrázku je složen z 11 shodných nepřekrývajících se trojúhelníků. Kratší strany trojúhelníků měří 10 cm a 24 cm.

Vysvětlete, proč je takové složení možné jen pro pravoúhlé trojúhelníky. Vypočtěte obvod mnohoúhelníku. (*K. Pazourek*)



Možné řešení. Všechny trojúhelníky jsou shodné, tedy úhly α a β u vyznačeného vrcholu jsou shodné. Součtem úhlů α a β je přímý úhel, tedy oba úhly musí být pravé.



U každého trojúhelníku označíme jeho strany vzestupně podle délek a, b, c. Podle zadání je $a = 10$ cm a $b = 24$ cm. Nejdelší stranu c určíme porovnáním podél vodorovné úhlopříčky mnohoúhelníku. Tuto úsečku tvoří tři krátké strany a a dvě střední strany b, tedy měří

$$3a + 2b = 3 \cdot 10 + 2 \cdot 24 = 78\,(\text{cm}).$$

Tatáž úsečka je tvořena třemi dlouhými stranami c, tedy

$$c = 78 : 3 = 26\,(\text{cm}).$$

Obvod mnohoúhelníku tvoří šest krátkých stran a, tři střední strany b, dvě dlouhé strany c a dvě (svislé) úsečky délek $b - a$. To jsou celkem čtyři krátké, pět středních a dvě dlouhé strany:

$$6a + 3b + 2c + 2(b - a) = 4a + 5b + 2c = 4 \cdot 10 + 5 \cdot 24 + 2 \cdot 26 = 212\,(\text{cm}).$$

Obvod mnohoúhelníku je 212 cm.

Poznámka. Délka dlouhé strany, tj. přepony pravoúhlého trojúhelníku je odvozena bez Pythagorovy věty, jejíž znalost v této kategorii nepředpokládáme. Pro kontrolu, resp. jako alternativní odvození uvádíme

$$c^2 = 26^2 = 676 = 10^2 + 24^2 = a^2 + b^2.$$

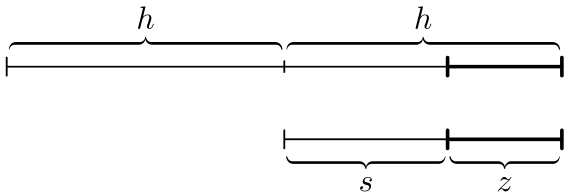
Hodnocení. 2 body za délku strany c; 2 body za obvod mnohoúhelníku; 2 body za zdůvodnění pravoúhlosti trojúhelníků a kvalitu komentáře.

Z7–II–3

Ráno před otevřením měli v obchodě nějaké hořké čokolády a dvakrát tolik mléčných. Během dne prodali od každého druhu alespoň jednu čokoládu, dohromady 111 kusů, ale nevyprodali všechny. Při večerní uzávěrce zjistili, že v obchodě zbylo stejně hořkých čokolád jako mléčných.

Jaký největší a jaký nejmenší mohl být počet mléčných čokolád před otevřením obchodu? (*M. Macko*)

Možné řešení. Ráno bylo mléčných čokolád dvakrát tolik co hořkých ($m = 2h$) a večer byly jejich počty stejné (z). Tedy se prodala polovina původního počtu mléčných (h) a navíc ještě stejný počet mléčných jako hořkých (s). V následujícím znázornění odpovídá první řádek mléčným čokoládám a druhý řádek hořkým, tenkou čarou je znázorněn prodej a tlustou čarou zůstatek:



Největší ranní počet mléčných čokolád ($2h$) odpovídá nejmenšímu počtu prodaných hořkých čokolád (s), což odpovídá největšímu večernímu zůstatku (z), a naopak. Oba případy rozebereme:

- Prodala se nejméně jedna hořká čokoláda. Jedné prodané hořké čokoládě odpovídá $111 - 1 = 110$ prodaných mléčných čokolád. V takovém případě byla polovina ranního počtu mléčných čokolád $110 - 1 = 109$, tedy jich původně bylo $2 \cdot 109 = 218$.
- Jak původní počet všech čokolád ($3h$), tak počet prodaných čokolád (111) je dělitelný třemi, tedy také zůstatek musí být dělitelný třemi. Nejmenší možný zůstatek tvoří 3 hořké a 3 mléčné čokolády. V takovém případě byl ranní počet všech čokolád $3 + 3 + 111 = 117$, tedy mléčných čokolád původně bylo $2/3 \cdot 117 = 78$.

Původní počet mléčných čokolád byl nejméně 78 a nejvíce 218.

Jiné řešení. Při stejném značení jako výše lze počet všech prodaných čokolád a počet zbylých čokolád od každého druhu vyjádřit takto:

$$h + 2s = 111, \quad z = h - s. \tag{$*$}$$

Jak s, tak z jsou podle zadání nenulová čísla. S těmito omezeními lze postupně odhalit nejmenší a největší možné hodnoty h:

s	1	2	...	36	37	...
$h = 111 - 2s$	109	107	...	39	37	...
$z = h - s$	108	106	...	3	0	...

- Největší h odpovídá $s = 1$. V tomto případě je $h = 109$, tedy $2h = 218$.
- Nejmenší h, pro které je z nenulové, odpovídá $s = 36$. V tomto případě je $h = 39$, tedy $2h = 78$.

Původní počet mléčných čokolád byl nejméně 78 a nejvíce 218.

Hodnocení. 1 bod za dílčí poznatky (znázornění, vztahy ($*$) či podobné úvahy); 2 body za odvození největšího možného počtu mléčných čokolád; 3 body za odvození nejmenšího možného počtu mléčných čokolád.

Řešení založená na zkoušení možností hodnoťte podle úplnosti postupu a komentáře.