II. kolo kategorie Z6

Z6–II–1

V následujícím sčítacím algebrogramu zastupuje každá z hvězdiček nějakou nenulovou číslici, všechna písmena S zastupují stejnou sudou číslici a všechna písmena L stejnou lichou číslici:

$$\begin{array}{r} S\ S\ S \\ L\ L \\ S \\ \hline *\ *\ 3 \end{array}$$

Nahraďte písmena a hvězdičky číslicemi tak, aby byl výpočet správný. Najděte všechny možnosti. (*E. Novotná*)

Možné řešení. Sudé číslice jsou 0, 2, 4, 6 a 8. Z požadavku o nenulovosti číslic výsledku plyne, že na místech S nemůže být 0. Ostatní možnosti postupně rozebereme:

a) Pro $S = 2$ je součet číslic na místech jednotek $4 + L$. Aby součet končil číslicí 3, musí být $L = 9$ a výpočet vypadá následovně:

$$\begin{array}{r} 2\ 2\ 2 \\ 9\ 9 \\ 2 \\ \hline 3\ 2\ 3 \end{array}$$

b) Pro $S = 4$ je součet číslic na místech jednotek $8 + L$. Aby součet končil číslicí 3, musí být $L = 5$ a výpočet vypadá následovně:

$$\begin{array}{r} 4\ 4\ 4 \\ 5\ 5 \\ 4 \\ \hline 5\ 0\ 3 \end{array}$$

c) Pro $S = 6$ je součet číslic na místech jednotek $12 + L$. Aby součet končil číslicí 3, musí být $L = 1$ a výpočet vypadá následovně:

$$\begin{array}{r} 6\ 6\ 6 \\ 1\ 1 \\ 6 \\ \hline 6\ 8\ 3 \end{array}$$

d) Pro $S = 8$ je součet číslic na místech jednotek $16 + L$. Aby součet končil číslicí 3, musí být $L = 7$ a výpočet vypadá následovně:

$$\begin{array}{r} 8\ 8\ 8 \\ 7\ 7 \\ 8 \\ \hline 9\ 7\ 3 \end{array}$$

Kromě případu b) jsou obě číslice na místech hvězdiček nenulové. Všechny vyhovující možnosti jsou a), c) a d).

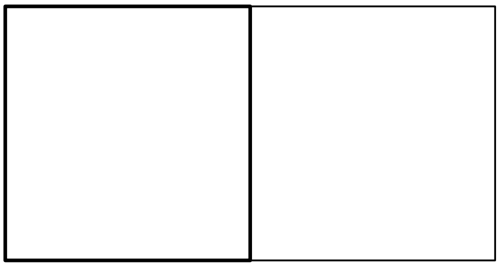
Hodnocení. 1 bod za vyloučení možnosti $S = 0$; po 1 bodu za rozbor každé z možností $S = 2, 4, 6, 8$; 1 bod za závěr (výběr vyhovujících možností).

Z6–II–2

Zahrada ve tvaru obdélníku je rozdělena na dvě stejné obdélníkové části. Obvod celé zahrady je 164 metrů a obvod každé ze dvou částí je 110 metrů.

Jaké jsou rozměry zahrady? (*M. Petrová*)

Možné řešení. Obvod obdélníku sestává ze dvou dvojic protilehlých stran.



Rozdíl obvodů celé zahrady a její poloviny odpovídá dvěma polovinám rozdělené strany zahrady. Tedy jedna strana zahrady měří $164 - 110 = 54$ metrů.

Tyto dvě strany dohromady měří $2 \cdot 54 = 108$ metrů, tedy zbylé dvě strany zahrady dohromady měří $164 - 108 = 56$ metrů. Druhá strana zahrady měří $56 : 2 = 28$ metrů.

Rozměry zahrady jsou 54 a 28 metrů.

Hodnocení. 3 body za jeden rozměr zahrady; 2 body za druhý rozměr zahrady; 1 bod za kvalitu komentáře.

Z6–II–3

Sněhurka a sedm trpaslíků stáli v řadě za sebou tak, že:

- Sněhurka sousedila s jedním vousatým a jedním bezvousým trpaslíkem,
- přesně jeden vousatý trpaslík měl za oba sousedy bezvousé trpaslíky,
- přesně jeden bezvousý trpaslík měl za oba sousedy vousaté trpaslíky,
- přesně tři vousatí trpaslíci stáli bezprostředně za sebou,
- žádní dva bezvousí trpaslíci spolu nesousedili.

Najděte všechna místa v řadě, kde mohla stát Sněhurka, a pro každou možnost zapište jedno pořadí vousatých a bezvousých trpaslíků. Vysvětlete, proč na ostatních místech Sněhurka stát nemohla. (*E. Novotná*)

Možné řešení. V následujících zápisech budeme značit Sněhurku S, vousaté trpaslíky 1 a bezvousé trpaslíky 0. Podle zadání se v osmimístném pořadí

- vyskytuje buď trojice $0S1$, nebo $1S0$,
- vyskytuje přesně jedna trojice 010,

- vyskytuje přesně jedna trojice 101,
- vyskytuje přesně jedna trojice 111,
- nevyskytuje dvojice 00.

Pro každé vyhovující pořadí je též opačné pořadí vyhovující; takové dvojice budeme psát na stejný řádek.

- Sněhurka mohla stát na druhém či sedmém místě, viz následující možnosti:

$$0S111010 \qquad 010111S0$$
$$1S010111 \qquad 111010S1$$

- Sněhurka mohla stát na čtvrtém či pátém místě, viz následující možnosti:

$$111S0101 \qquad 1010S111$$

- Z první podmínky plyne, že Sněhurka má z každé strany alespoň jednoho souseda. Tedy Sněhurka nemohla stát ani na prvním, ani na osmém místě.
- Mohla Sněhurka stát na třetím či šestém místě? V takovém případě by z jedné strany od Sněhurky byla dvě volná místa a z druhé strany pět:

$$**S***** \qquad *****S**$$

  Někam potřebujeme umístit trojice 010, 101 a 111. Na kratší konec se nevejde žádná trojice, tedy by všechny tři musely být na delším konci. Ale nejúspornější souvislé pořadí, které obsahuje trojice 010, 101 a 111, zabírá šest míst: 111010 či 010111. Tedy Sněhurka nemohla stát ani na třetím, ani na šestém místě.

Hodnocení. Po 1 bodu za každé vyhovující místo Sněhurky a příklad pořadí trpaslíků; 2 body za zdůvodnění, že jinde Sněhurka stát nemohla.