1. *Lesníci se chystají kácet v lese. Ekologové se toho obávají, ale lesníci je uklidňují: „Podívejte se, v současnosti tvoří smrky 96 % všech stromů v lese. Budeme kácet jen smrky a po skončení kácení bude podíl smrků 95 %, tedy skoro stejný jako před kácením.“ Kolik procent stromů v lese plánují lesníci vykácet?*

Řešení. Ze čtyřprocentní menšiny stromů původního lesa se žádný nepokácí. Tato menšina bude tvořit 5 % lesa nového, což lehce neformálně zapíšeme jako

$$4\ \%\ \text{původního lesa} = 5\ \%\ \text{nového lesa}.$$

To znamená, že poměr počtu stromů v novém lese vůči počtu stromů v původním lese bude 4 : 5, tj. 80 %. Takže lesníci se chystají vykácet 20 % stromů původního lesa.

Poznámka. Matematicky formálněji bychom označili počet stromů původního lesa p, počet stromů nového lesa n a rovnici zapsali jako $0{,}04p = 0{,}05n$. Úpravou získáme $\frac{n}{p} = \frac{0{,}04}{0{,}05} = 0{,}80$.

Jiné řešení. Přímočarejším, ale o poznání těžkopádnějším postupem je pracovat rovnou s podíly ze zadání. Označme opět p počet stromů původního lesa, s počet smrků v původním lese, s' počet smrků, které se mají pokácet. V lese zůstane $s - s'$ smrků a počet stromů v novém lese bude $p - s'$. Máme tedy zadáno, že

$$\frac{s}{p} = 0{,}96 \qquad \text{a} \qquad \frac{s - s'}{p - s'} = 0{,}95.$$

To je soustava dvou rovnic se třemi neznámými, kterou ale nemusíme v úplnosti řešit. Zadání po nás jen požaduje určit podíl s'/p. Přímou cestou k tomuto cíli je podívat se na naši soustavu tak, že p budeme považovat za „známé číslo“ (parametr) a za neznámé budeme považovat pouze s a s', které vyjádříme v závislosti na p.

Z první rovnice dostaneme $s = 0{,}96p$, což dosadíme do druhé rovnice a vyjádříme s':

$$\begin{aligned} \frac{0{,}96p - s'}{p - s'} &= 0{,}95 \\ 0{,}96p - s' &= 0{,}95(p - s') \\ 0{,}96p &= 0{,}95p + 0{,}05s' \\ 0{,}01p &= 0{,}05s' \\ \frac{1}{5}p &= s' \end{aligned}$$

Obě neznámé s, s' jsme vyjádřili pomocí p a můžeme snadno zapsat podíl s'/p jako $\frac{1}{5}$, což je 20 %.

2. *Alice, Bob a Charlie spolu hráli jedno odpoledne fotbal. V každé hře byl jeden brankářem a zbývající dva proti němu útočili, dokud jeden z útočníků nedal gól. Útočník, který dal gól, se stal v následující hře brankářem. Alice celkem útočila v 10 hrách, Bob v 18 hrách a Charlie ve 14 hrách. Kdo mohl dát šestý gól? Určete všechny možnosti.*

ŘEŠENÍ. Šestý gól mohla dát jedině Alice.

Alice útočila v 10 hrách, Bob v 18 a Charlie ve 14, takže ve všech hrách dohromady útočilo celkem $10+18+14 = 42$ hráčů. Přitom v každé hře útočili přesně dva hráči, takže proběhlo $42/2 = 21$ her.

Z těchto 21 her útočila Alice jen v 10 hrách, takže v 11 hrách musela být v bráně. Nikdo ale nemůže být v bráně dvakrát po sobě (jakmile dostane gól, opustí bránu a vlastní góly se nepočítají), takže Alice musela být v bráně v první hře a potom v každé liché hře až po tu úplně poslední, jednadvacátou. Speciálně musela být v bráně v sedmé hře, tedy právě ona musela útočit a dát gól v předcházející šesté hře.

POZNÁMKA. V řešení jsme ukázali, že Alice musela dát šestý gól, ale nezabývali jsme se otázkou, zda jej dát vůbec mohla – kdyby zadání obsahovalo sporné podmínky, mohla by otázka v principu mít i odpověď „nikdo“. Touto otázkou se naštěstí není potřeba zabývat, protože podle zadání fotbalové odpoledne nějak proběhlo. Přesto pro zajímavost uveďme příklad, jak se postupně mohli brankáři střídat:

$$A\ \underbrace{\underline{B}\ A\ \underline{B}\ A\ \underline{B}}_{3\times B}\ A\ \underbrace{\underline{C}\ A\ C\ A\ C\ A\ C\ A\ C\ A\ C\ A\ \underline{C}}_{7\times C}\ A$$

3. *Najděte nejmenší kladný násobek čísla* 2025*, který začíná čtyřčíslím* 2026*.*

Řešení. Kdykoliv budeme mluvit o zbytku, budeme mít na mysli zbytek po dělení číslem 2025.

Číslo 2026 má zbytek 1, takže $20260 = 10 \cdot 2026$ má zbytek $10 \cdot 1$. Čísla $20260, 20261, \ldots, 20269$ tak mají po řadě zbytky $10, 11, \ldots, 19$ a nejsou násobky 2025. Rozmysleme si, že podobně šestimístná i sedmimístná čísla mají malé zbytky:

- Nejmenší šestimístné číslo začínající 2026, tj. číslo 202600, má zbytek 100, a tak čísla $202600, 202601, \ldots, 202699$ mají po řadě zbytky $100, 101, \ldots, 199$ a nemohou být násobky 2025.
- Nejmenší sedmimístné číslo začínající 2026, tj. číslo 2026000, má zbytek 1000, a tak čísla $2026000, 2026001, \ldots, 2026999$ mají po řadě zbytky $1000, 1001, \ldots, 1999$ a ani ona nemohou být násobky 2025.

Nejmenší osmimístné číslo začínající 2026, tj. číslo 20260000, zapíšeme ve tvaru $20250000 + 10000$. První sčítanec je násobkem 2025, takže hledáme nejmenší násobek čísla 2025 přesahující 10000. Protože $4 \cdot 2025 < 10000 < 5 \cdot 2025 = 10125$, číslo $20250000 + 10125 = 20260125$ je nejmenším násobkem 2025 začínajícím čtyřčíslím 2026.

Poznámka. První dva odstavce vzorového řešení můžeme zapsat dospěleji, ale asi méně srozumitelně. Hledáme $(4+k)$místné číslo pro celé $k \geqq 0$. Všechna taková čísla jsou z intervalu od $2026 \cdot 10^k$ do $2027 \cdot 10^k$ (nezabýváme se teď otázkou, zda krajní čísla do intervalu zařadit nebo ne). Jejich zbytky se pohybují v intervalu od 10^k do $2 \cdot 10^k$. Mezi nimi hledáme násobek 2025, což se může podařit jen tehdy, pokud $2025 \leqq 2 \cdot 10^k$, tedy nutně $k \geqq 4$.

Uvedené řešení nevyužívá žádnou speciální vlastnost čísel 2025, 2026, takže jej můžeme použít i pro jiná po sobě jdoucí čtyřmístná čísla. Je možné, že ve školním roce 4567/4568 budou žáci hledat nejmenší násobek čísla 4567 začínající čtyřčíslím 4568 a úplně stejnými argumenty vyloučí všechna nejvýše sedmimístná čísla. Protože $2 \cdot 4567 < 10000 < 3 \cdot 4567 = 13701$, je 45683701 nejmenším násobkem 4567, který začíná čtyřčíslím 4568.

Jiné řešení. V případě čísla 2025 můžeme využít jeho rozkladu $25 \cdot 9 \cdot 9$ a známých tvrzení o dělitelnosti 25 a 9:

- Číslo je dělitelné 25, právě když končí dvojčíslím 00, 25, 50 nebo 75.
- Číslo je dělitelné 9, právě když jeho ciferný součet je dělitelný 9.

Pro dělitelnost 25 se tak za číslicemi 2026 musí nacházet alespoň dvě další číslice. Ciferný součet čtyřčíslí 2026 je 10, takže přidáním žádného z dvojčíslí 00, 25, 50, 75 s ciferným součty 0, 7, 5, 12 nedostaneme násobek 9.

Jsou-li za čtyřčíslím 2026 tři číslice, pak dělitelnost 25 ponechává v úvahách pouze čísla tvaru 2026␣00, 2026␣25, 2026␣50, 2026␣75. Dělitelnost 9 a již uvedené ciferné součty umožňují jednoznačně dopočítat chybějící číslice: 2026800, 2026125, 2026350, 2026575. Uvedená čísla jsou dělitelná $25 \cdot 9 = 225$, ale lze ověřit, že žádné z nich není dělitelné $25 \cdot 9 \cdot 9 = 2025$.

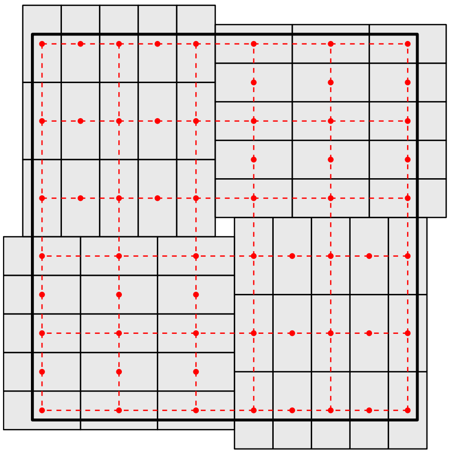
Jsou-li za čtyřčíslím 2026 čtyři číslice, pak dělitelnost 25 ponechává v úvahách pouze čísla tvaru 2026␣␣00, 2026␣␣25, 2026␣␣50, 2026␣␣75. Doplníme-li na vynechané pozice nejmenší možné dvojčíslí 00, nebude mít žádné z čísel ciferný součet dělitelný 9. Druhé nejmenší dvojčíslí 01 vytvoří jediné číslo dělitelné 9, a sice 20260125. Snadno ověříme, že $20260125 = 2025 \cdot 10005$, takže toto číslo je nejmenším násobkem 2025, který začíná čtyřčíslím 2026.

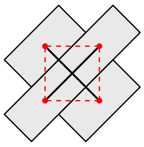
4. *Na stolek* 10×10 *pokládáme dominové kostky* 1×2 *tak, že se žádné dvě nepřekrývají. Kostky mohou částečně přečnívat přes hrany stolku, ale aby nespadly, musí jejich středy ležet na stolku, nikoliv na jeho hraně nebo za ní. Kostky nelze stavět „na bok“.*

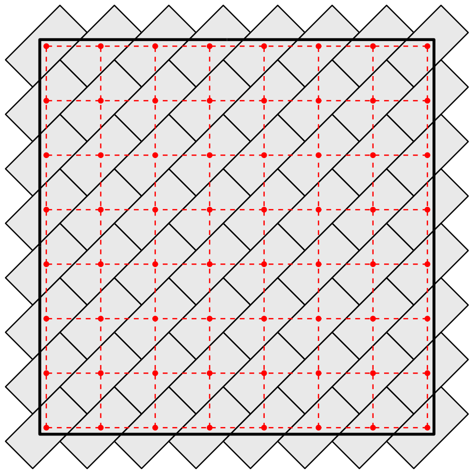
a) Nalezněte způsob, jak na stolek umístit 60 *kostek, pokud strany kostek musí být rovnoběžné se stranami stolku. (Za umístění více než* 50 *kostek dostanete částečné body.)*

b) Nalezněte způsob, jak na stolek umístit více než 60 *kostek, pokud strany kostek nemusí být rovnoběžné se stranami stolku.*

Řešení. Na obrázku vlevo znázorňujeme, jak rozmístit 60 kostek se stranami rovnoběžnými se stranami stolku. Na obrázku vpravo je 64 kostek umístěných na stolek „šikmo“ se sklonem 45 stupňů. Všem kostkám jsme vyznačili jejich středy (červené tečky) a středy kostek jsme zarovnali do naznačené mřížky (čárkované čáry).







Ještě je potřeba zdůvodnit, že kostky lze opravdu zarovnat tak, aby čárkovaně naznačené čáry skutečně byly rovné, a že celá naznačená mřížka má rozměry menší než 10×10. To uděláme pro každou část zvlášť.

a) Naznačená mřížka se skládá z obdélníků a čtverců, které mají rozměry buď 2×2 (skoro všude), nebo $2 \times 1{,}5$ (u os stran naznačeného stolku), nebo $1{,}5 \times 1{,}5$ (úplně uprostřed). Čárkované čáry jsou proto skutečně přímé. Horní okraj čárkovaně vyznačené mřížky má celkovou délku $2 \cdot 2 + (0{,}5 + 1) + 2 \cdot 2 = 9{,}5$ a podobně mají délku 9,5 i zbylé okraje mřížky. Celá čárkovaná mřížka se tedy (i s rezervou) vejde na stolek 10×10.

b) Představme si nejdřív čtyři dominové kostky zarovnané jako na obrázku uprostřed. Středy těchto čtyř kostek tvoří čtyřúhelník. Obě úhlopříčky tohoto čtyřúhelníku mají délku 2. Navíc jsou tyto úhlopříčky rovnoběžné se stranami kostek, takže jsou navzájem kolmé. Čtyřúhelník je proto čtverec, jeho úhlopříčky se půlí a délka jeho strany je z Pythagorovy věty rovna $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Na obrázku vpravo jsou tak středy dominových kostek zarovnané do čtvercové mřížky o rozměrech $7\sqrt{2} \times 7\sqrt{2}$. A jelikož $7 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{98} < \sqrt{100} = 10$, vejde se i tentokrát celá čárkovaná mřížka (i s rezervou) na stolek 10×10.