

Ústřední kolo kategorie A

Brno, 16. března 2026



1. Pro kladná reálná čísla x, y, z platí $x^2 + y^2 + z^2 = 75$ a dva ze tří součtů $x + y, y + z, z + x$ jsou aspoň 10. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu zbývajících součtů.
2. Necht T je těžiště ostroúhlého trojúhelníku ABC . Na kratším oblouku BC kružnice jemu opsané je dán bod P . Označme P' patu kolmice z bodu P k úsečce BC . Dále označme X průsečík přímky $P'T$ a rovnoběžky s BC vedené bodem A . Nakonec označme S střed úsečky PX . Dokažte, že $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle SAC|$.
3. Řekneme, že skupina několika lidí je *trojitá*, pokud se každý člen skupiny zná s přesně třemi dalšími členy a skupinu nelze rozdělit do dvou neprázdných částí tak, aby každý jejich člen měl všechny své známé ve své části. Vztah známosti je vzájemný. Určete největší celé číslo $k \geq 3$, pro které existuje kladné celé číslo n takové, že z každé trojité skupiny s alespoň n lidmi lze vybrat alespoň k lidí a posadit je ke kulatému stolu tak, že se každí dva sousedé znají.

Soutěžící má na vypracování úloh 4,5 hodiny čistého času; případné dotazy k textu zadání mohou být zodpovězeny v prvních 20 minutách. Za každou úlohu může soutěžící získat 7 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby. Knihy, kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou.

Ústřední kolo kategorie A

Brno, 17. března 2026



4. Necht a, b jsou různá kladná celá čísla taková, že čísla $a^2 + 1$ a $ab + 1$ mají stejné množiny prvočinitelů. Dokažte, že číslo $a^2 + b^2 + 2$ je dělitelné druhou mocninou některého prvočísla.
5. Necht $\mathcal{P} = (a_1, a_2, \dots, a_{2026})$ je libovolné pořadí čísel $1, 2, \dots, 2026$. Řekneme, že index $i \in \{1, 2, \dots, 2026\}$ je *dobrý*, pokud každé z 2026 čísel

$$\begin{aligned} & a_i, \\ & a_i - a_{i+1}, \\ & a_i - a_{i+1} + a_{i+2}, \\ & a_i - a_{i+1} + a_{i+2} - a_{i+3}, \\ & \vdots \\ & a_i - a_{i+1} + \dots - a_{i+2023} + a_{i+2024}, \\ & a_i - a_{i+1} + \dots - a_{i+2023} + a_{i+2024} - a_{i+2025} \end{aligned}$$

je nezáporné, kde indexy počítáme modulo 2026, tj. klademe $a_{j+2026} = a_j$ pro každé celé j . Označme $n(\mathcal{P})$ počet dobrých indexů pořadí \mathcal{P} . Určete nejmenší možné i největší možné $n(\mathcal{P})$.

6. Necht $ABCDEF$ je šestiúhelník vepsaný do kružnice se středem O , jehož každé dvě protilehlé strany jsou rovnoběžné. Přímký AB, CD a EF vymezují trojúhelník Δ_1 a přímký BC, DE a FA vymezují trojúhelník Δ_2 . Dokažte, že středy kružnic opsaných trojúhelníkům Δ_1 a Δ_2 jsou souměrně sdružené podle bodu O .

Soutěžící má na vypracování úloh 4,5 hodiny čistého času; případné dotazy k textu zadání mohou být zodpovězeny v prvních 20 minutách. Za každou úlohu může soutěžící získat 7 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby. Knihy, kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou.