1. *Pro kladná reálná čísla x, y, z platí $x^2+y^2+z^2=75$ a dva ze tří součtů $x+y$, $y+z$, $z+x$ jsou aspoň 10. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu zbývajícího součtu.* (Patrik Bak)

ŘEŠENÍ. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $x+y \geqq 10$ a $x+z \geqq 10$. Máme najít nejmenší a největší možnou hodnotu součtu $y+z$. Dokážeme, že nejmenší možná hodnota je $\frac{10}{3}$ a největší možná hodnota je 10. Hodnoty $\frac{10}{3}$ lze dosáhnout volbou $(x,y,z)=(\frac{25}{3},\frac{5}{3},\frac{5}{3})$ a hodnoty 10 lze dosáhnout volbou $(x,y,z)=(5,5,5)$. Zbývá tak dokázat, že platí $\frac{10}{3} \leqq y+z \leqq 10$.

- *Důkaz horního odhadu $y+z \leqq 10$:* Sporem předpokládejme $y+z>10$. Potom
$$\begin{aligned}300 = 3\cdot 10^2 &< (x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2 = \\ &= 2(x^2+y^2+z^2)+2xy+2yz+2zx \leqq 4(x^2+y^2+z^2) = 4\cdot 75 = 300,\end{aligned}$$
kde jsme využili nerovnost $2ab \leqq a^2+b^2$, platnou pro libovolná reálná čísla a, b; tuto nerovnost získáme úpravou nerovnosti $0 \leqq (a-b)^2$. Obdrželi jsme tak spor $300<300$, tedy největší možná hodnota součtu $y+z$ je skutečně 10.
- *Důkaz dolního odhadu $y+z \geqq \frac{10}{3}$:* Platí $x+y \geqq 10$ a $x+z \geqq 10$, proto $y \geqq 10-x$ a $z \geqq 10-x$. Odtud zřejmě plyne $x<10$, protože v opačném případě by platilo $x^2+y^2+z^2>x^2 \geqq 100>75$. To znamená, že $10-x>0$, a proto $y^2 \geqq (10-x)^2$ a $z^2 \geqq (10-x)^2$. Dostáváme tak
$$75 = x^2+y^2+z^2 \geqq x^2+(10-x)^2+(10-x)^2 = 3x^2-40x+200.$$
Úpravou získáme
$$0 \geqq 3x^2-40x+125 = (x-5)(3x-25).$$
Odtud již nutně $5 \leqq x \leqq \frac{25}{3}$. Nyní již můžeme určit nejmenší možnou hodnotu $y+z$:
$$y+z \geqq (10-x)+(10-x) = 20-2x \geqq 20-2\cdot\frac{25}{3} = \frac{10}{3}.$$

JINÉ ŘEŠENÍ. Označme $c=\frac{1}{2}(x+y)$, $b=\frac{1}{2}(x+z)$, $a=\frac{1}{2}(y+z)$. Potom $x=b+c-a$, $y=a+c-b$, $z=a+b-c$. Bez újmy na obecnosti nechť $x+y \geqq 10$ a $x+z \geqq 10$, tedy $b \geqq 5$ a $c \geqq 5$. Určíme nejmenší a největší možnou hodnotu součtu $y+z=2a$ odhadem hodnoty a.

Dosazením do první rovnice dostaneme
$$\begin{aligned}0 &= x^2+y^2+z^2-75 = (b+c-a)^2+(a+c-b)^2+(a+b-c)^2-75 = \\ &= 3a^2+3b^2+3c^2-2ab-2bc-2ca-75 = 3a^2-2a(b+c)+3(b^2+c^2)-2bc-75.\end{aligned}$$
Tuto rovnici vyřešíme jako kvadratickou s neznámou a, dostaneme
$$\begin{aligned}a &= \frac{2(b+c) \pm \sqrt{4(b+c)^2-4\cdot 3(3(b^2+c^2)-2bc-75)}}{2\cdot 3} = \\ &= \frac{b+c \pm \sqrt{225-8(b^2+c^2)+8bc}}{3}.\end{aligned}$$

Užitím nerovnosti mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem získáme

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{b+c \pm \sqrt{225-8(b^2+c^2)+8bc}}{3} \leqq \sqrt{\frac{b^2+c^2+225-8(b^2+c^2)+8bc}{3}} = \\
&= \sqrt{\frac{225-7(b^2+c^2)+8bc}{3}} = \sqrt{\frac{225-3(b^2+c^2)-4(b-c)^2}{3}} \leqq \\
&\leqq \sqrt{\frac{225-3(b^2+c^2)}{3}} \leqq 5,
\end{aligned}
$$

jelikož podle předpokladů $b, c \geqq 5$, a tedy i $b^2, c^2 \geqq 25$. To znamená, že $y+z=2a \leqq 10$. Rovnost nastane v případě $b=c=5$, tedy stejně jako v prvním řešení je tato hodnota dosažena pro $x=y=z=5$.

Nyní odhadneme hodnotu a zdola. Platí

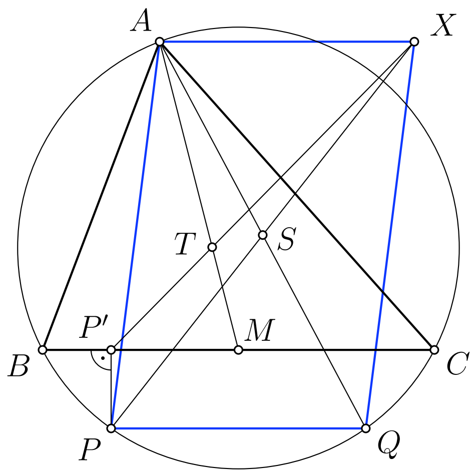
$$
\begin{aligned}
a &\geqq \frac{b+c-\sqrt{225-8(b^2+c^2)+8bc}}{3} = \frac{(b+c)-\sqrt{225-4(b^2+c^2)-4(b-c)^2}}{3} \geqq \\
&\geqq \frac{(b+c)-\sqrt{225-4(b^2+c^2)}}{3} \geqq \frac{5}{3},
\end{aligned}
$$

kde znovu využíváme $b, c \geqq 5$ a $b^2, c^2 \geqq 25$. To znamená, že $y+z=2a \geqq \frac{10}{3}$. Rovnost nastane v případě $b=c=5$, tedy stejně jako v prvním řešení je tato hodnota dosažena pro $x=\frac{25}{3}$ a $y=z=\frac{5}{3}$.

2. *Nechť T je těžiště ostroúhlého trojúhelníku ABC. Na kratším oblouku BC kružnice jemu opsané je dán bod P. Označme P' patu kolmice z bodu P k úsečce BC. Dále označme X průsečík přímky $P'T$ a rovnoběžky s BC vedené bodem A. Nakonec označme S střed úsečky PX. Dokažte, že $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle SAC|$.* (Michal Janík)

ŘEŠENÍ. Nejprve vyřešíme případ, kdy je bod P středem kratšího oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC. Přímka AP je tak osou úhlu BAC. Bod P' je v tomto případě středem úsečky BC, takže $P'T$ splývá s těžnicí z vrcholu A. Bod X tak splývá s bodem A a nakonec bod S leží na přímce AP. Protože AP je osou úhlu BAC, platí $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle SAC|$.

Ve zbytku řešení předpokládejme, že bod P je různý od středu kratšího oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC. Označme Q bod na kružnici opsané trojúhelníku ABC různý od bodu P takový, že platí $PQ \parallel BC$. Z uvedené rovnoběžnosti plyne, že $BPQC$ je rovnoramenný lichoběžník, a tedy obvodové úhly BAP a QAC mají stejnou velikost. K důkazu požadované rovnosti $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle SAC|$ stačí ukázat, že body A, S, Q leží na téže přímce.



Ukážeme, že $APQX$ je rovnoběžník. Platí $AX \parallel BC$ a $BC \parallel PQ$, tedy i $AX \parallel PQ$. Stačí nám tak ukázat, že $|AX| = |PQ|$. Označme M střed úsečky BC. Jelikož body M i P' leží na přímce BC, z rovnoběžnosti AX a BC plyne, že trojúhelníky TAX a TMP' jsou podobné, platí tak

$$\frac{|AX|}{|MP'|} = \frac{|AT|}{|MT|} = 2,$$

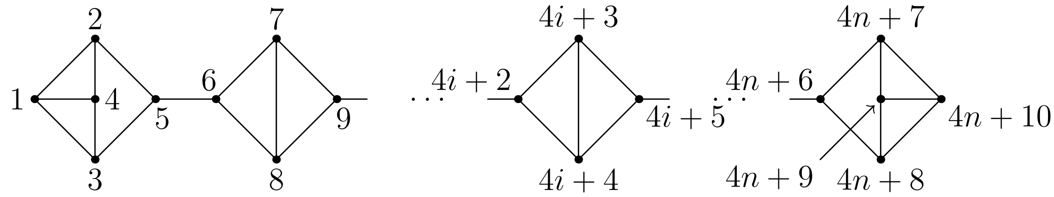
jelikož těžiště trojúhelníku ABC dělí jeho těžnici AM v poměru $2:1$.

Protože $BPQC$ je rovnoramenný lichoběžník a je symetrický podle osy úsečky BC, platí $|PQ| = 2 \cdot |MP'|$, a proto $|AX| = 2 \cdot |MP'| = |PQ|$. To spolu s rovnoběžností PQ a AX dává, že $APQX$ je rovnoběžník. Bod S je středem jeho úhlopříčky PX, takže je i průsečíkem jeho úhlopříček, a tedy S leží i na úhlopříčce AQ (dokonce je jejím středem). Proto $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle QAC| = |\sphericalangle SAC|$, jak jsme měli dokázat.

3. *Řekneme, že skupina několika lidí je* trojitá*, pokud se každý člen skupiny zná s přesně třemi dalšími členy a skupinu nelze rozdělit do dvou neprázdných částí tak, aby každý jejich člen měl všechny své známé ve své části. Vztah známosti je vzájemný. Určete největší celé číslo $k \geqq 3$, pro které existuje kladné celé číslo n takové, že z každé trojité skupiny s alespoň n lidmi lze vybrat alespoň k lidí a posadit je ke kulatému stolu tak, že se každí dva sousedé znají.* (Jozef Rajník)

ŘEŠENÍ. Ukážeme, že řešením je $k = 5$. Skupinu lidí, ve které lze vybrat k lidí a posadit je kolem kulatého stolu tak, aby se každí dva sousedé znali, budeme nazývat *k-kulatá*.

Nejprve ukážeme, že žádné $k \geqq 6$ nevyhovuje. To uděláme tak, že pro každé nezáporné celé číslo n najdeme trojitou skupinu $4n + 10$ lidí, ve které žádná k-tice s $k \geqq 6$ není k-kulatá. Konstrukce je znázorněna na obrázku. Vrcholy grafu odpovídají lidem, hrany odpovídají známostem.

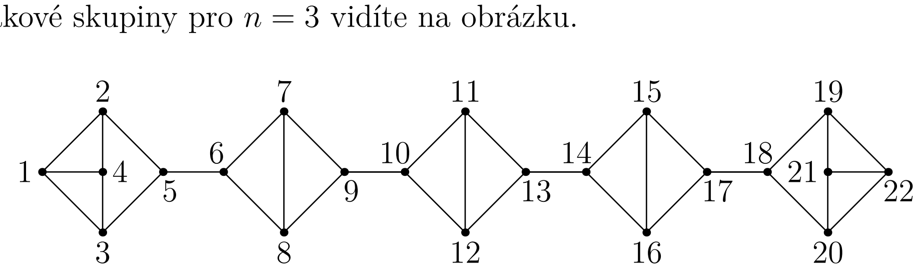


Členy skupiny očíslujeme od 1 po $4n + 10$ a celou skupinu rozdělíme na $n + 2$ buněk:

- členové 1, 2, 3, 4 a 5 se známostmi $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$;
- členové $4i + 2$, $4i + 3$, $4i + 4$ a $4i + 5$ se známostmi $\{4i + 2, 4i + 3\}$, $\{4i + 2, 4i + 4\}$, $\{4i + 3, 4i + 4\}$, $\{4i + 3, 4i + 5\}$, $\{4i + 4, 4i + 5\}$ pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$;
- členové $4n + 6$, $4n + 7$, $4n + 8$, $4n + 9$ a $4n + 10$ se známostmi $\{4n + 6, 4n + 7\}$, $\{4n+6, 4n+8\}$, $\{4n+7, 4n+9\}$, $\{4n+7, 4n+10\}$, $\{4n+8, 4n+9\}$, $\{4n+8, 4n+10\}$.

Nadto se znají ještě dvojice $\{4i + 1, 4i + 2\}$ pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n + 1\}$.

Snadno vidíme, že taková skupina lidí je trojitá. Navíc u kulatého stolu mohou sedět jen členové jedné buňky – pokud by totiž u stolu seděli dva lidé z různých buněk, musela by na každém ze dvou oblouků mezi nimi sedět ta samá dvojice $\{4i + 1, 4i + 2\}$, pro některé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Jelikož každá buňka má nejvýše 5 členů, nelze za kulatý stůl usadit více než 5 lidí. Takto sestrojená trojitá skupina lidí proto není k-kulatá pro $k \geqq 6$. Příklad takové skupiny pro $n = 3$ vidíte na obrázku.

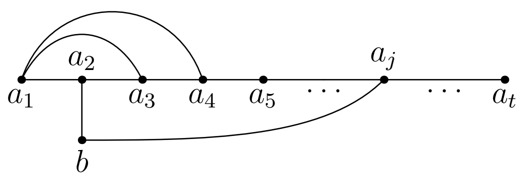


Ve zbytku řešení dokážeme, že každá skupina s alespoň pěti lidmi je 5kulatá. Postupujme sporem. Předpokládejme, že existuje nějaká alespoň pětičlenná trojitá skupina lidí, která není 5kulatá. Vezměme nejdelší posloupnost $\mathcal{P} = (a_1, a_2, \ldots, a_t)$ různých členů uvažované skupiny, v níž se libovolní dva sousední lidé znají. Jelikož naše skupina není

5kulatá, její člen a_1 nezná žádného člena a_i, kde $i \geqq 5$. Také všichni jeho známí musí být v posloupnosti $\mathcal{P}$, jinak bychom mohli posloupnost $\mathcal{P}$ prodloužit. Proto $t \geqq 4$ a člen a_1 zná právě členy a_2, a_3, a_4.

Ukážeme, že $t \geqq 5$. Pro spor předpokládejme, že $t = 4$. Jelikož posloupnost $\mathcal{P}$ nelze prodloužit, člen a_4 zná členy a_1, a_2, a_3. Dostáváme skupinu čtyř lidí, ve které se každý zná s každým, tedy neznají žádného z ostatních členů. Nějací členové mimo tuto čtveřici existují, jelikož uvažujeme alespoň pětičlennou skupinu. Dostali jsme tak rozdělení na dvě neprázdné skupiny, které je ve sporu s vlastností trojité skupiny ze zadání. Proto platí $t \geqq 5$.

Jelikož člen a_4 zná členy a_1, a_3, a_5, tak členové a_2 a a_4 se neznají. Člen a_2 zná členy a_1, a_3. Jeho třetího známého označme b. Pokud by platilo $b = a_i$ pro nějaké i, tak $i \geqq 5$ a umíme ke kulatému stolu posadit lidi $a_1, a_3, a_4, \ldots, a_i, a_2$, kterých je i, čili alespoň 5, a to je spor. Proto se člen b nenachází v posloupnosti $\mathcal{P}$. Všichni známí člena b se však v této posloupnosti musí nacházet, jinak bychom ji uměli prodloužit tím, že a_1 nahradíme b a tímto známým. Tedy člen b má kromě a_2 ještě nějakého známého a_j v posloupnosti $\mathcal{P}$. Členové a_1, a_3 a a_4 již mají všechny tři své známé v posloupnosti $\mathcal{P}$, proto $j \geqq 5$. Potom však umíme ke kulatému stolu posadit j členů $b, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_j$, což je spor. Tím jsme ukázali, že každá trojitá skupina s alespoň pěti lidmi je 5kulatá.



4. *Nechť a, b jsou různá kladná celá čísla taková, že čísla a^2+1 a $ab+1$ mají stejné množiny prvočinitelů. Dokažte, že číslo a^2+b^2+2 je dělitelné druhou mocninou některého prvočísla.* (Dominik Martin Rigász)

Řešení. Nechť p je prvočinitelem čísla $ab+1$. Jelikož čísla a^2+1 a $ab+1$ mají stejnou množinu prvočinitelů, tak $p \mid a^2+1$. Pak $p \mid a^2+1-(ab+1)=a(a-b)$. Ale čísla a, $ab+1$ jsou zřejmě nesoudělná a $p \mid ab+1$, nemůže tak platit $p \mid a$, tedy platí $p \mid a-b$. Pokud je tedy nějaké prvočíslo p dělitelem $ab+1$, pak je kromě a^2+1 dělitelem i $a-b$.

Ukážeme, že existuje prvočíslo p takové, že $p^2 \mid ab+1$. Potom bude platit $p \mid a-b$, tedy $p^2 \mid (a-b)^2$ a dále $p^2 \mid (a-b)^2+2(ab+1)=a^2+b^2+2$, což máme dokázat.

Sporem předpokládejme, že $ab+1$ je bezčtvercové (tedy není dělitelné druhou mocninou žádného prvočísla). Jak jsme již ukázali dříve, každé prvočíslo, které dělí $ab+1$, dělí i číslo $a-b$. Protože $ab+1$ je bezčtvercové, platí $ab+1 \mid a-b$. Současně čísla a, b jsou různá, takže $a-b \neq 0$ a platí $ab+1 \leqq |a-b|$. Odtud dostáváme $ab < ab+1 \leqq |a-b| < \max(a,b) \leqq ab$, protože a, b jsou kladná celá čísla, čímž jsme dospěli ke sporu. To znamená, že $ab+1$ není bezčtvercové, což nám stačilo dokázat.

Poznámka. Dvojicí, která splňuje podmínky ze zadání, je například $(a,b)=(3,13)$, pro ni platí $a^2+1=2\cdot 5$, $ab+1=2^3\cdot 5$ (a $a^2+b^2+2=2^2\cdot 3^2\cdot 5$). Dalšími dvojicemi splňujícími podmínky úlohy jsou například $(31,993)$ a $(13,523)$, pro ně mají čísla a^2+1 a $ab+1$ tři různé prvočinitele.

5. *Nechť* $\mathcal{P} = (a_1, a_2 \dots, a_{2026})$ *je libovolné pořadí čísel* $1, 2, \dots, 2026$. *Řekneme, že index* $i \in \{1, 2, \dots, 2026\}$ *je* dobrý, *pokud každé z* 2026 *čísel*

$$\begin{gathered} a_i, \\ a_i - a_{i+1}, \\ a_i - a_{i+1} + a_{i+2}, \\ a_i - a_{i+1} + a_{i+2} - a_{i+3}, \\ \vdots \\ a_i - a_{i+1} + \ldots - a_{i+2023} + a_{i+2024}, \\ a_i - a_{i+1} + \ldots - a_{i+2023} + a_{i+2024} - a_{i+2025} \end{gathered}$$

je nezáporné, kde indexy počítáme modulo 2026, *tj. klademe* $a_{j+2026} = a_j$ *pro každé celé* j. *Označme* $n(\mathcal{P})$ *počet dobrých indexů pořadí* $\mathcal{P}$. *Určete nejmenší možné i největší možné* $n(\mathcal{P})$. (Jakub Krivošík)

Řešení. Ukážeme, že největší možná hodnota $n(\mathcal{P})$ je 1013 a nejmenší možná hodnota $n(\mathcal{P})$ je 1.

Součet všech čísel je $1 + 2 + \ldots + 2026 = \frac{1}{2} \cdot 2026 \cdot 2027 = 1013 \cdot 2027$, což je liché číslo. To znamená, že součet všech čísel se sudými indexy je různý od součtu všech čísel s lichými indexy, a tedy jeden z těchto součtů je menší. Při dokazování odhadů budeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že menší součet mají čísla na sudých pozicích.

Nejprve určíme největší možnou hodnotu $n(\mathcal{P})$. Žádný sudý index i, nemůže být dobrý, protože

$$a_i - a_{i+1} + \ldots + a_{i+2024} - a_{i+2025} =$$

$$= a_i + a_{i+2} + \cdots + a_{i+2024} - (a_{i+1} + a_{i+3} + \ldots + a_{i+2025}) < 0.$$

To znamená, že $n(\mathcal{P}) \leqq 1013$. Ukážeme, že hodnoty 1013 lze dosáhnout například volbou $a_1 = 2026$, $a_2 = 2025, \dots, a_{2026} = 1$. Samotný člen a_{2i+1} je zřejmě nezáporný. Každý člen se sudým indexem je o 1 menší než ten předcházející, takže každý součet tvaru

$$\underbrace{a_{2i+1} - a_{2i+2}}_{\geqq 0} + \cdots + \underbrace{a_{2j+1} - a_{2j+2}}_{\geqq 0}$$

je nezáporný. To znamená, že i každý součet tvaru

$$a_{2i+1} - a_{2i+2} + \cdots + a_{2j+1} - a_{2j+2} + a_{2j+3},$$

je nezáporný, protože přičtením kladného čísla a_{2j+3} se nezápornost zachová. Všech 1013 lichých indexů je proto dobrých, takže největší možná hodnota $n(\mathcal{P})$ je 1013.

Nyní ukážeme, že nejmenší možná hodnota $n(\mathcal{P})$ je 1. Označme $b_i = a_{2i-1} - a_{2i}$. Z definice b_i musí platit $b_1 + b_2 + \cdots + b_{1013} > 0$. Index tvaru $2j + 1$ je dobrý, pokud každé z 2026 čísel

$$a_{2j+1}, \quad b_{j+1}, \quad b_{j+1} + a_{2j+3}, \quad b_{j+1} + b_{j+2}, \quad \dots,$$
$$b_{j+1} + \ldots + b_{j+1012} + a_{2j+2025}, \quad b_{j+1} + \ldots + b_{j+1013},$$

bude nezáporné, kde indexy u a počítáme modulo 2026 a u b modulo 1013. To nastane, když každé z 1013 čísel

$$b_{j+1}, \quad b_{j+1}+b_{j+2}, \quad \ldots, \quad b_{j+1}+b_{j+2}+\cdots+b_{1013}+b_1+\cdots+b_j$$

je nezáporné, jelikož přičtením kladného čísla se nezápornost zachová.

Nechť m je nejmenší index, pro který je součet $b_1+b_2+\cdots+b_m$ minimální. Pokud by byl tento součet nezáporný, tak by byl index 1 dobrý a platilo by požadované $n(\mathcal{P}) \geqq 1$. Předpokládejme, že je součet $b_1+b_2+\cdots+b_m$ záporný. Ukážeme, že index $2m+1$ je dobrý.

Pokud by pro nějaké celé číslo k splňující $m+1 \leqq k \leqq 1013$ platilo $b_{m+1}+\ldots+b_k < 0$, pak

$$b_1+b_2+\cdots+b_m+b_{m+1}+\cdots+b_k < b_1+b_2+\cdots+b_m,$$

což je ve sporu s definicí m. Pro každé k splňující $m+1 \leqq k \leqq 1013$ tak platí $b_{m+1}+\cdots+b_k \geqq 0$.

Dále ukážeme, že platí $b_{m+1}+\cdots+b_{1013}+b_1+\cdots b_k \geqq 0$ pro každé celé číslo k splňující $1 \leqq k \leqq m$. Platí

$$b_{m+1}+\cdots+b_{1013}+b_1+\cdots+b_k \geqq b_{m+1}+\cdots b_{1013}+b_1+\cdots+b_m > 0,$$

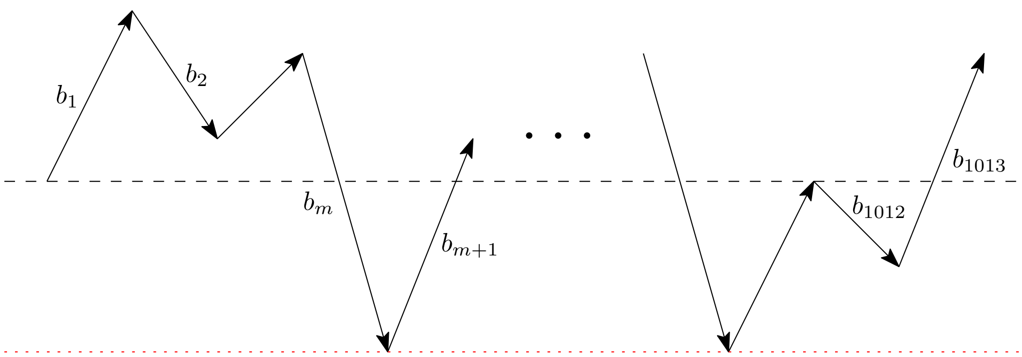
kde jsme využili, že pro každé k platí $b_1+\cdots+b_k \geqq b_1+\cdots+b_m$.

Ukázali jsme tak, že každé z čísel

$$b_{m+1}, \quad b_{m+1}+b_{m+2}, \quad \ldots, \quad b_{m+1}+b_{m+2}+\cdots+b_{1013}+b_1+\cdots+b_m$$

je nezáporné. Index $2m+1$ je proto dobrý a i v tomto případě platí $n(\mathcal{P}) \geqq 1$. Hodnoty $n(\mathcal{P}) = 1$ lze dosáhnout volbou $a_1 = 2026, a_2 = 1, a_3 = 2, \ldots, a_{2026} = 2025$, kde pro každé $i \in \{2, 3, \ldots, 2026\}$ je $a_i - a_{i+1} = -1$, tj. i není dobrý index. Jediným dobrým indexem tak může být 1. Takže nejmenší možná hodnota $n(\mathcal{P})$ je 1.

Komentář. Řešení si můžeme představit i graficky. Budeme dělat kroky o b_i nahoru, je-li $b_i \geqq 0$, nebo o $|b_i|$ dolů, je-li $b_i < 0$. Platí $b_1+b_2+\cdots+b_{1013} > 0$, proto hodnota na konci je nad černou čárkovanou čarou. Index m označuje první krok, který nás dostane na nejnižší hodnotu (červená tečkovaná čára). Cílem je ukázat, že pokud začneme s b_{m+1} (místo b_1) a po b_{1013} budeme pokračovat s $b_1, \ldots, b_m$, tak tato posloupnost nikdy neklesne pod počáteční hodnotu.



6. *Nechť $ABCDEF$ je šestiúhelník vepsaný do kružnice se středem O, jehož každé dvě protilehlé strany jsou rovnoběžné. Přímky AB, CD a EF vymezují trojúhelník Δ_1 a přímky BC, DE a FA vymezují trojúhelník Δ_2. Dokažte, že středy kružnic opsaných trojúhelníkům Δ_1 a Δ_2 jsou souměrně sdružené podle bodu O.* (Michal Janík)

ŘEŠENÍ. Nechť O_1 a O_2 jsou po řadě středy kružnic opsaných trojúhelníkům Δ_1 a Δ_2. Označme p_1, p_2 a p kolmice k AB procházející po řadě body O_1, O_2 a O. Ukážeme, že přímky p_1 a p_2 jsou souměrně sdružené podle přímky p.

Označme P a Q průsečíky přímky AB po řadě s přímkou CD a přímkou EF. Podobně označme R a S průsečíky přímky DE po řadě s přímkou BC a přímkou FA. Přímka p_1 je osou úsečky PQ, jelikož je kolmá k tětivě PQ a prochází středem kružnice opsané trojúhelníku Δ_1. Podobně p_2 je osou úsečky RS. Dále p je společnou osou úseček AB a DE, jelikož tyto úsečky jsou rovnoběžnými tětivami zadané kružnice se středem O a p je k těmto úsečkám kolmá.

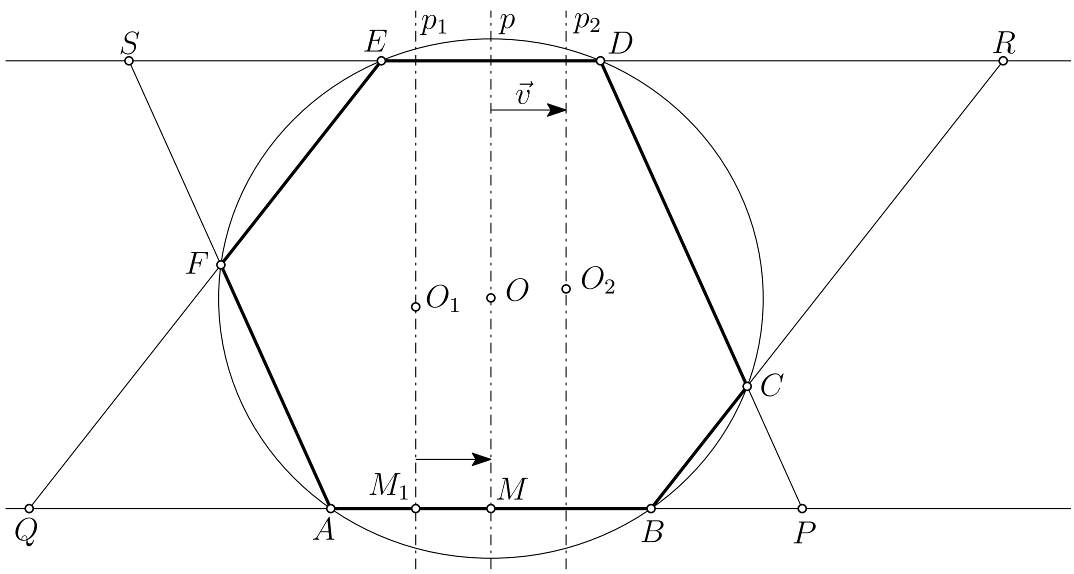
Pomocí vektorů dokážeme, že přímky p_1 a p_2 jsou souměrně sdružené podle p. Označme M_1 střed úsečky PQ a M střed úsečky AB. Protože přímky p_1 a p jsou po řadě osami úseček PQ a AB, bod M_1 leží na p_1 a bod M leží na p. Potom $\overrightarrow{M_1M}$ je vektor posunutí zobrazujícího přímku p_1 na p, který je současně kolmý k přímce p. Tento vektor můžeme vyjádřit následovně

$$\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{M_1P} - \overrightarrow{MP} = \frac{\overrightarrow{QP}}{2} - (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BP}) =$$

$$= \frac{\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}}{2} - \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \overrightarrow{BP}\right) = \frac{\overrightarrow{QA} - \overrightarrow{BP}}{2}.$$

Analogicky vyjádříme vektor posunutí zobrazujícího p na p_2, který je kolmý na p, a to

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{DR} - \overrightarrow{SE}}{2}.$$



Abychom ukázali, že p_1 a p_2 jsou souměrně sdružené podle p, potřebujeme dokázat, že $\overrightarrow{v}$ má stejnou velikost a orientaci jako $\overrightarrow{M_1M}$. Stačí nám tak ukázat, že platí $\overrightarrow{QA} - \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{DR} - \overrightarrow{SE}$. Všimněme si, že $APDS$ a $QBRE$ jsou rovnoběžníky. Platí tak

$$\overrightarrow{QA} - \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{QB} - \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{ER} - \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{DR} - \overrightarrow{SE},$$

jak jsme chtěli dokázat. Přímky p_1 a p_2 jsou tedy souměrně sdružené podle přímky p.

Jelikož jsou p_1 a p_2 souměrně sdružené podle přímky p, jsou sdružené i podle bodu O, který na přímce p leží. Nechť q_1, q_2 a q jsou kolmice k BC procházející po řadě body O_1, O_2 a O. Analogicky dokážeme, že přímky q_1 a q_2 jsou souměrně sdružené podle bodu O. Jelikož O_1 je průsečík přímek p_1, q_1 a O_2 je průsečík přímek p_2, q_2, jsou i body O_1 a O_2 souměrně sdružené podle bodu O.