I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

Najděte všechny trojice navzájem různých prvočísel p_1, p_2, p_3, pro která platí

$$(p_2 - p_1) \cdot (p_3 - p_1) = 195.$$

(*E. Novotná*)

Možné řešení. Součinem čísel $p_2 - p_1$ a $p_3 - p_1$ má být liché číslo 195. Tedy každé z čísel $p_2 - p_1$ a $p_3 - p_1$ musí být liché. Rozdíl dvou čísel je lichý, právě když jedno z čísel je liché a druhé sudé. Čísla p_1, p_2, p_3 mají být navzájem různá prvočísla a jediné sudé prvočíslo je 2. Tedy $p_1 = 2$ a zajímají nás všechny dvojice navzájem různých prvočísel p_2 a p_3, pro která platí

$$(p_2 - 2) \cdot (p_3 - 2) = 195. \tag{$*$}$$

Možné rozklady čísla 195 na dva součinitele jsou

$$1 \cdot 195 = 3 \cdot 65 = 5 \cdot 39 = 13 \cdot 15.$$

Tomu odpovídají následující dvojice čísel p_2, p_3, která jsou možným řešením ($*$) (až na pořadí):

$$3, 197, \quad 5, 67, \quad 7, 41, \quad 15, 17.$$

První tři dvojice tvoří prvočísla, čtvrtou nikoli.

Všechny vyhovující trojice prvočísel p_1, p_2, p_3 (až na pořadí p_2 a p_3), pro která platí podmínka ze zadání, jsou:

$$2, 3, 197, \quad 2, 5, 67, \quad 2, 7, 41.$$

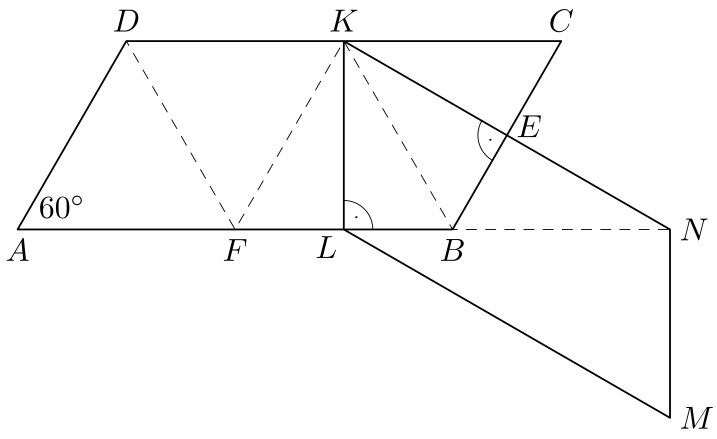
Z8–I–2

Pro rovnoběžníky $ABCD$ a $KLMN$ platí:

- bod K je středem úsečky CD,
- bod K je průsečíkem přímky CD s osou úsečky BC,
- bod L je průsečíkem přímky AB s osou úsečky CD,
- bod N je průsečíkem přímky AB s osou úsečky BC,
- úhel BAD má velikost 60°.

Určete poměr obsahů rovnoběžníků $ABCD$ a $KLMN$. (*M. Macko*)

Možné řešení. Situaci si znázorníme spolu s dodatečným dělením, které dále okomentujeme. Bod E značí střed úsečky BC, bod F značí střed úsečky AB:

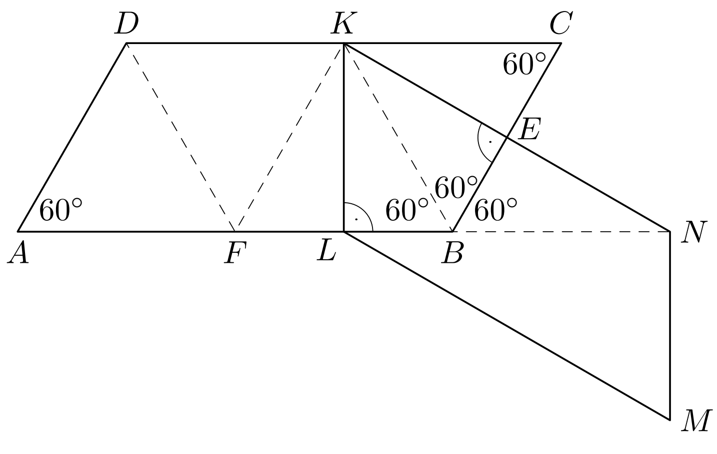


Protější strany rovnoběžníku jsou shodné a body F a K jsou středy protějších stran rovnoběžníku $ABCD$. Tedy rovnoběžník $ABCD$ se skládá ze dvou shodných rovnoběžníků $AFKD$ a $FBCK$.

Úhlopříčka rovnoběžníku jej dělí na dva shodné trojúhelníky a úsečky FD a BK jsou úhlopříčkami rovnoběžníků $AFKD$ a $FBCK$. Tedy rovnoběžník $ABCD$ se skládá ze čtyř navzájem shodných trojúhelníků AFD, KDF, FBK a CKB.

Bod K leží na ose úsečky BC, tedy úsečky BK a CK jsou shodné a trojúhelník BCK je rovnoramenný. Protější vnitřní úhly v rovnoběžníku jsou shodné, tedy úhly BAD a BCD jsou shodné a mají velikost 60°. Odtud vyplývá, že trojúhelník BCK je rovnostranný. Tedy rovnoběžník $ABCD$ se skládá ze čtyř rovnostranných trojúhelníků shodných s trojúhelníkem BCK.

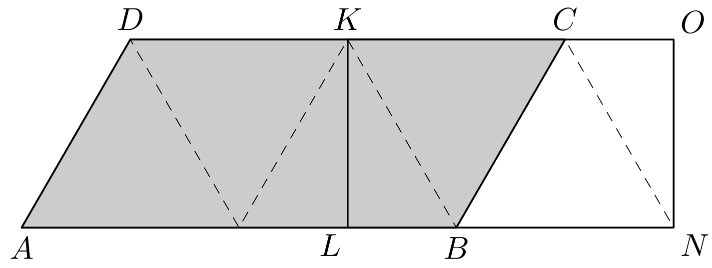
Přímý úhel FBN je součtem úhlů FBK, KBC a CBN, z nichž první dva mají velikost 60°. Tedy úhel CBN má velikost 60°. Trojúhelníky BEK, BLK, BEN jsou všechny pravoúhlé a mají shodné úhly u vrcholu B. Navíc první s druhým má společnou stranu BK a první se třetím má společnou stranu BE. Tedy tyto tři trojúhelníky jsou navzájem shodné (podle věty *usu*).



Celkem rovnoběžník $ABCD$ se skládá z osmi trojúhelníků shodných s trojúhelníkem BEK. Trojúhelník KLN se skládá ze tří trojúhelníků shodných s týmž trojúhelníkem, tedy rovnoběžník $KLMN$ se skládá ze šesti trojúhelníků shodných s trojúhelníkem BEK.

Poměr obsahů rovnoběžníků $ABCD$ a $KLMN$ je $8 : 6 = 4 : 3$.

Poznámka. Rovnoběžník $KLMN$ má stejný obsah jako obdélník $KLNO$, kde bod O je průsečíkem přímek MN a CD. Rovnoběžníky $ABCD$ a $KLNO$ mají společnou výšku KL a poměr odpovídajících stran je $|AB| : |LN| = 2 : 1{,}5 = 4 : 3$. Poměr jejich obsahů je stejný.



Z8–I–3

Tomáš sbírá pohlednice z Islandu, Anglie a Norska. Z každé země má alespoň jednu pohlednici, celkem jich má 40. Pohlednic z Anglie má více než pohlednic z Norska. Pohlednic z Islandu má více než pětinásobek a méně než šestinásobek počtu pohlednic z Anglie.

Ze kterých zemí jsou pohlednice, jejichž počet v Tomášově sbírce lze určit jednoznačně?

(*E. Novotná*)

Možné řešení. Počty pohlednic z jednotlivých zemí označíme jejich počátečními písmeny. Postupně vzhledem k A odvodíme rozmezí pro N $(0 < N < A)$ a I $(5A < I < 6A)$ a ověříme, zda pro nějaké A, N, I platí zbylá podmínka $(A + N + I = 40)$:

- Pro $A < 6$ je $N < 5$ a $I < 30$. Součet $A + N + I$ je nanejvýš $5 + 4 + 29 = 38 < 40$.
- Pro $A = 6$ je $N = 1, \ldots, 5$ a $I = 31, \ldots, 35$. Součet $A + N + I$ je 40 ve třech případech:

$$N = 1,\ I = 33, \quad N = 2,\ I = 32, \quad N = 3,\ I = 31. \tag{$*$}$$

- Pro $A > 6$ je $I > 35$ a součet $A + N + I$ je alespoň $7 + 1 + 36 = 45 > 40$.

Tedy pohlednic z Anglie bylo 6, počty ostatních jsou vyčísleny v $(*)$.

Počet pohlednic lze jednoznačně určit pouze pro Anglii.

Jiné řešení. Při stejném značení jako výše vyjádříme podmínky ze zadání:

$$A + N + I = 40, \quad 0 < N < A, \quad 5A < I < 6A.$$

Z poslední podmínky plyne, že I je v rozmezí

$$I = 5A + 1,\ \ldots,\ 6A - 1.$$

Odtud a z první podmínky plyne, že $N = 40 - A - I$ je v rozmezí

$$N = 39 - 6A,\ \ldots,\ 41 - 7A.$$

Z podmínky $0 < N$ plyne, že $A < 7$. Z podmínky $N < A$ plyne, že $A > 5$. Celkem tedy $A = 6$ a možné dvojice N a I jsou jako v ($*$).

Počet pohlednic lze jednoznačně určit pouze pro Anglii.

Z8–I–4

Žáci napsali první písemku s průměrným hodnocením 84 bodů. Stejní žáci napsali druhou písemku s průměrným hodnocením 70 bodů. Čtyři z těchto žáků měli v obou písemkách po 63 bodech. Průměrné hodnocení ostatních žáků ve druhé písemce bylo 72 bodů.

Určete průměrné hodnocení ostatních žáků v první písemce. (*I. Jančigová*)

Možné řešení. Součet bodů, které podprůměrným žákům chyběly do celkového průměru, odpovídá součtu bodů, o které nadprůměrní žáci tento průměr převyšovali.

Ve druhé písemce měli čtyři žáci každý o 7 bodů méně než byl průměr, což je v součtu 28 bodů. Ve stejné písemce měli ostatní žáci průměrně o 2 body více než byl průměr. Tedy ostatních žáků bylo 14 ($4 \cdot 7 = 14 \cdot 2$) a všech žáků bylo 18 ($14 + 4 = 18$).

V první písemce byl celkový průměr všech žáků 84 bodů, což je v součtu $18 \cdot 84 = 1512$ bodů. Čtyři podprůměrní žáci měli v součtu $4 \cdot 63 = 252$ bodů. Ostatních 14 žáků mělo v součtu $1512 - 252 = 1260$ bodů, tedy průměrně $1260/14 = 90$ bodů.

Průměrné hodnocení ostatních žáků v první písemce bylo 90 bodů.

Poznámka. Pokud označíme počet všech žáků n, pak součet bodů v první písemce byl $84n$ a ve druhé $70n$ bodů. Průměrné hodnocení ostatních žáků ve druhé písemce bylo $(70n - 252)/(n - 4) = 72$ bodů, což po úpravách dává $n = 18$. Tedy průměrné hodnocení ostatních žáků v první písemce bylo $(84n - 252)/(n - 4) = 1260/14 = 90$ bodů.

Z8–I–5

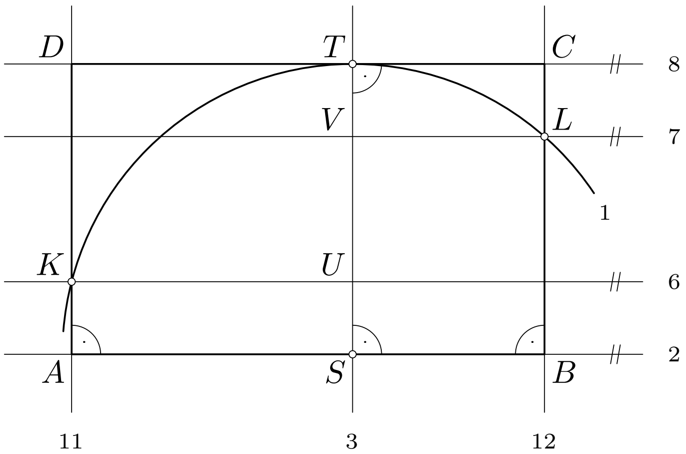
Je dána kružnice k se středem S a poloměrem 6 cm a přímka p procházející bodem S. Sestrojte obdélník $ABCD$ tak, aby platilo:

- vrcholy A a B leží na přímce p,
- kružnice k se dotýká strany CD,
- kružnice k protíná stranu AD v bodě K a stranu BC v bodě L,
- $|AK| = |CL| = 1{,}5$ cm.

(*M. Petrová*)

Možné řešení. Bod dotyku kružnice k a strany CD označíme T. Úsečka ST je poloměrem kružnice, tedy $|ST| = 6$ cm, a T je bodem dotyku, tedy $ST \perp CD$. Tím je zcela určena přímka CD, tzn. jeden rozměr obdélníku — jedná se o přímku rovnoběžnou s přímkou p ve vzdálenosti 6 cm.

Druhý rozměr obdélníku je vymezen ostatními podmínkami ze zadání — body K a L leží na rovnoběžkách s přímkami p a CD, které jsou od nich vzdáleny 1,5 cm (směrem dovnitř obdélníku), strany AD a BC prochází těmito body a jsou kolmé k přímce p.



Konstrukce (body 1 a 2 představují zadání, body 3 až 15 řešení úlohy):

1) kružnice se středem S a poloměrem 6 cm (stačí část),
2) přímka procházející bodem S,
3) kolmice k přímce 2) procházející bodem S,
4) bod T je průsečíkem kružnice 1) a přímky 3),
5) body U a V na úsečce ST se vzdálenostmi $|SU| = |TV| = 1{,}5\,\mathrm{cm}$,
6) rovnoběžka s přímkou 2) procházející bodem U,
7) rovnoběžka s přímkou 2) procházející bodem V,
8) rovnoběžka s přímkou 2) procházející bodem T,
9) bod K je průsečíkem kružnice 1) a přímky 6),
10) bod L je průsečíkem kružnice 1) a přímky 7) v opačné polorovině než K vzhledem k přímce 3),
11) kolmice k přímce 2) procházející bodem K,
12) kolmice k přímce 2) procházející bodem L,
13) body A a D jsou průsečíky přímky 11) s přímkami 2) a 8),
14) body B a C jsou průsečíky přímky 12) s přímkami 2) a 8),
15) obdélník $ABCD$.

Z8–I–6

Jonáš a Michal sestavili každý svůj osmiboký jehlan s devíti různými čísly na jeho různých stěnách. Všechna čísla byla větší než 10, menší než 30 a žádné nebylo dělitelné čtyřmi. Pro každý vrchol však součet čísel na všech stěnách, které ho obsahovaly, byl dělitelný čtyřmi. Jonáš tvrdil, že na dvou bočních stěnách má čísla 14 a 15. Michal tvrdil, že na dvou bočních stěnách má čísla 14 a 17.

Kdo z chlapců měl pravdu? (*K. Pazourek*)

Možné řešení. Hlavní vrchol jehlanu náleží všem osmi bočním stěnám, ostatních osm vrcholů náleží podstavě a dvěma dalším stěnám. Zkusíme najít možná očíslování stěn Jonášova jehlanu:

- Uvažme čísla 14 a 15 na dvou sousedních bočních stěnách jehlanu. Aby součet těchto čísel s číslem na podstavě byl dělitelný čtyřmi, musí číslo na podstavě dávat po dělení čtyřmi zbytek 3. Nejmenší nepoužité číslo s touto vlastností v daném rozmezí je 11.

- Uvažme číslo 11 na podstavě a hledejme číslo na boční stěně sousedící se stěnou s číslem 15. Aby součet těchto tří čísel byl dělitelný čtyřmi, musí hledané číslo dávat po dělení čtyřmi zbytek 2. Nejmenší nepoužité číslo s touto vlastností v daném rozmezí je 18.
- Tímto způsobem postupně najdeme možná čísla na osmi bočních stěnách:

$$14,\ 15,\ 18,\ 19,\ 22,\ 23,\ 26,\ 27.$$

- Součet těchto osmi čísel je 164, což je číslo dělitelné čtyřmi. Tedy Jonáš mohl mít jehlan se všemi vlastnostmi ze zadání.

Obdobně lze najít možná očíslování stěn Michalova jehlanu: na podstavě může být číslo 13 a na osmi bočních stěnách čísla

$$14,\ 17,\ 18,\ 21,\ 22,\ 25,\ 26,\ 29.$$

Tedy také Michal mohl mít jehlan se všemi vlastnostmi ze zadání.

Pravdu měli oba chlapci.

Poznámka. Uvedená očíslování stěn nejsou jediná možná, ale v daných mezích jich není mnoho. Obecně lze z podmínky o součtech trojic čísel na stěnách se společným vrcholem na podstavě odvodit, že rozdíly čísel ob jednu boční stěnu musí být dělitelné čtyřmi. Podmínka o součtu osmi stěn se společným hlavním vrcholem je pak splněna automaticky. Při hledání možných očíslování stěn stačí zvolit čísla na dvou sousedních bočních stěnách, čísla ob stěnu vybírat tak, aby se lišila o násobek čtyř, doplnit číslo na podstavě a neustále hlídat dané meze.