I. kolo kategorie Z7

Z7–I–1

Kolik existuje čtyřmístných čísel takových, že jejich třetina, polovina, dvojnásobek a trojnásobek jsou všechno čtyřmístná čísla? (*M. Macko*)

Možné řešení. Čtyřmístné číslo musí být v rozmezí

- od 3000 do 9999, aby jeho třetina byla čtyřmístným číslem,
- od 2000 do 9998, aby jeho polovina byla čtyřmístným číslem,
- od 1000 do 4999, aby jeho dvojnásobek byl čtyřmístným číslem,
- od 1000 do 3333, aby jeho trojnásobek byl čtyřmístným číslem.

Z první dvou podmínek plyne, že číslo musí být dělitelné dvěma a třemi, tedy šesti. Společně s ostatními podmínkami dostáváme, že číslo musí být v rozmezí od 3000 do 3333.

Násobky šesti v rozmezí od 3000 do 3333 jsou:

$$3000 = 500 \cdot 6, \quad 3006 = 501 \cdot 6, \quad \dots, \quad 3330 = 555 \cdot 6.$$

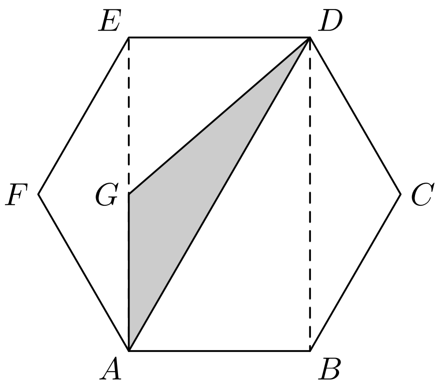
Čísel vyhovujících uvedeným podmínkám je 56.

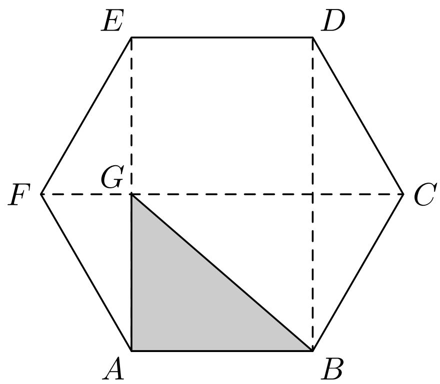
Z7–I–2

V pravidelném šestiúhelníku $ABCDEF$ je bod G středem úhlopříčky AE.

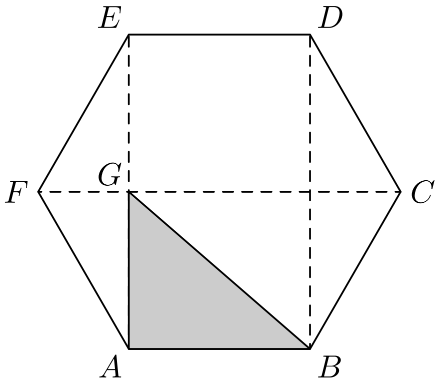
Určete poměr obsahů trojúhelníku ADG a šestiúhelníku $ABCDEF$. (*E. Semerádová*)

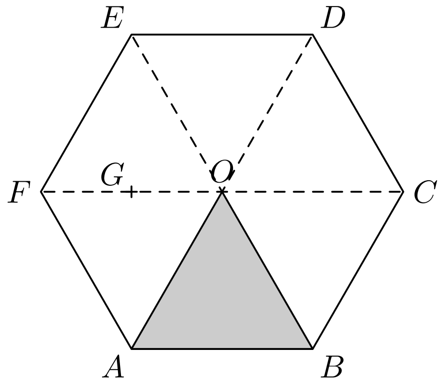
Možné řešení. V pravidelném šestiúhelníku $ABCDEF$ je úhlopříčka AE rovnoběžná s úhlopříčkou BD. Tedy trojúhelník ADG má stejný obsah jako kterýkoli trojúhelník $AD'G$, jehož vrchol D' leží na přímce BD. Speciálně trojúhelník ADG má stejný obsah jako trojúhelník ABG:





Bod G je středem úhlopříčky AE, tedy leží také na úhlopříčce CF. Úhlopříčka CF je rovnoběžná se stranou AB. Tedy trojúhelník ABG má stejný obsah jako kterýkoli trojúhelník ABG', jehož vrchol G' leží na přímce CF. Na této přímce leží střed O pravidelného šestiúhelníku, tedy trojúhelník ABG má stejný obsah jako trojúhelník ABO:





Dohromady platí, že trojúhelník ADG má stejný obsah jako trojúhelník ABO, a pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ sestává ze šesti trojúhelníků shodných s trojúhelníkem ABO.

Poměr obsahů trojúhelníku ADG a šestiúhelníku $ABCDEF$ je $1 : 6$.

Z7–I–3

Pan Komický, Elegantní a Vážný se znají z golfu. Jeden se jmenuje Karel, jeden Erik a jeden Viktor. Jeden nosí kravatu barvy krémové, jeden barvy ebenové a jeden barvy vínové.

- Výherce posledního utkání nosí ebenovou kravatu.
- Pan Elegantní nebyl nikdy na návštěvě u pana Komického.
- Viktor nosí krémovou kravatu.
- Panu Komickému připadá vtipné, že nikdy nevyhrál.
- Karel byl po posledním utkání u pana Komického.
- Pan Vážný nosí vínovou kravatu.

Zjistěte, jaké je vlastní jméno každého z pánů a jakou kdo nosí kravatu.

(*E. Novotná*)

Možné řešení. Rozlišujeme tři znaky, u každého máme tři možnosti. Vztahy ze zadání budeme postupně doplňovat do tabulky. Z poslední informace víme následující:

příjmení	Komický	Elegantní	Vážný
jméno			
kravata			vínová

Z první a čtvrté informace plyne, že pan Komický nenosí ebenovou kravatu. Z předchozího víme, že vínovou kravatu nosí pan Vážný, tedy kravata pana Komického je krémová.

Ebenová kravata zbývá na pana Elegantního:

příjmení	Komický	Elegantní	Vážný
jméno			
kravata	krémová	ebenová	vínová

Ze třetí informace a předchozího doplnění plyne, že pan Komický je Viktor. Ze druhé a páté informace plyne, že pan Elegantní není Karel. Tedy pan Elegantní je Erik a pan Vážný je Karel.

Výsledné přiřazení vypadá takto:

příjmení	Komický	Elegantní	Vážný
jméno	Viktor	Erik	Karel
kravata	krémová	ebenová	vínová

Z7–I–4

Adéla, Beáta, Šárka a Jitka si natrhaly třešně. Beáta jich měla pětkrát víc než Adéla, Šárka měla o 15 třešní víc než Beáta, Jitka měla o 200 víc než Adéla.

O kolik nejméně se mohly lišit počty třešní Šárky a Jitky? A kolik třešní by v takovém případě měla každá z dívek? (*K. Pazourek*)

Možné řešení. Počty třešní dívek označíme počátečními písmeny jejich jmen. Podle zadání platí

$$B = 5A, \quad \check{S} = B + 15, \quad J = A + 200.$$

Počty třešní Šárky a Jitky se lišily o

$$|J - \check{S}| = |185 + A - B| = |185 - 4A|.$$

Tento rozdíl je jistě nenulový, neboť 185 není násobkem čtyř. Nejbližší násobek čtyř k číslu 185 je $184 = 4 \cdot 46$. Tato možnost odpovídá hodnotám $A = 46$, $B = 230$, $\check{S} = 245$, $J = 246$.

Počty třešní Šárky a Jitky se lišily nejméně o jednu třešni. V takovém případě měla Adéla 46, Beáta 230, Šárka 245 a Jitka 246 třešní.

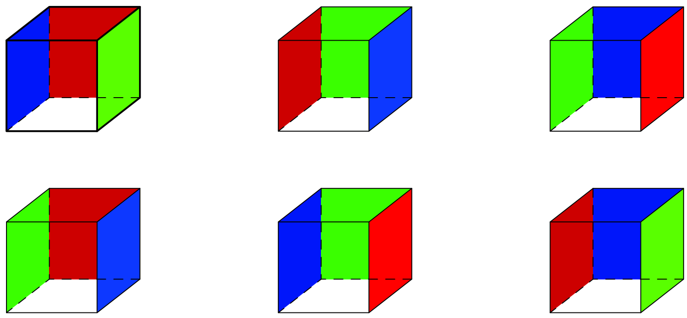
Z7–I–5

Václav měl několik bílých kostek. Na každé kostce nabarvil tři různé stěny třemi různými barvami, a to červenou, zelenou a modrou. Poté roztřídil kostky do skupin podle typu obarvení tak, že všechny kostky v jedné skupině vypadaly po vhodném otočení stejně.

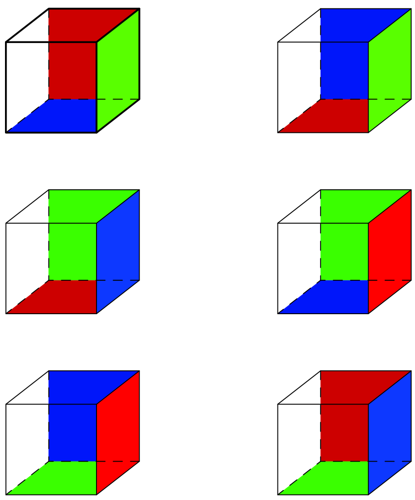
Kolik nejvýše skupin mohl Václav vytvořit? (*I. Jančigová*)

Možné řešení. Tři vybrané stěny lze třemi barvami obarvit celkem šesti způsoby. Podle vzájemné polohy obarvených stěn na kostce rozlišujeme dva případy:

- Obarvené stěny nemají společný vrchol, tzn. po rozvinutí tvoří pás. V tomto případě jsou Václavovy skupiny tři a jsou určeny barvou prostřední stěny. V následujícím přehledu jsou skupiny rozděleny po sloupcích (osa otočení prochází středem prostřední z obarvených stěn a je k ní kolmá):



- Obarvené stěny mají společný vrchol, tzn. každá sousedí s každou. V tomto případě jsou Václavovy skupiny dvě a opět jsou rozděleny po sloupcích (osa otočení je tělesová úhlopříčka procházející společným vrcholem obarvených stěn):



Václav mohl vytvořit pět skupin.

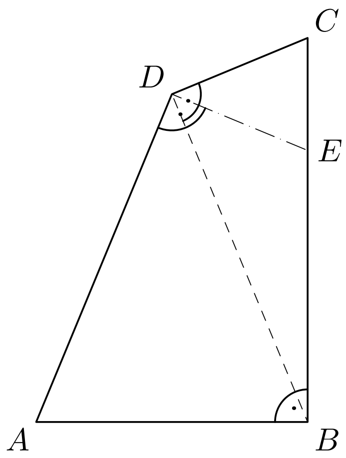
Z7–I–6

Pro čtyřúhelník $ABCD$ platí:

- strana AD a úhlopříčka BD jsou shodné,
- úhlopříčka BD a strana DC jsou kolmé,
- strany AB a BC jsou kolmé,
- osa úhlu BDC a strana AD jsou kolmé.

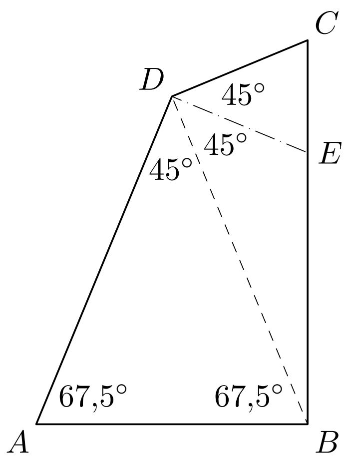
Určete velikost úhlu BCD. (*M. Macko*)

Možné řešení. Průsečík osy úhlu BDC se stranou BC označíme E:

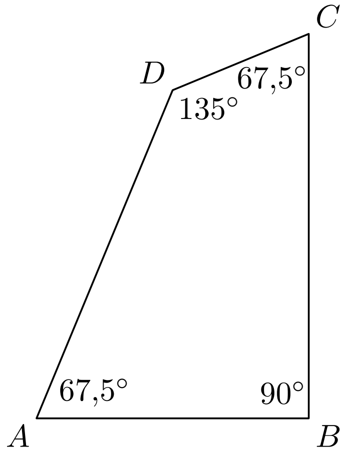


Přímka DE je osou pravého úhlu BDC, tedy úhly BDE a EDC jsou shodné s velikostí 45°. Úhel ADC je součtem úhlů ADE a EDC a úhel ADE je pravý. Tedy velikost úhlu ADC je 135° $(90 + 45 = 135)$.

Úhel ADE je součtem úhlů ADB a BDE. Úhel ADE je pravý a úhel BDE má velikost 45°, tedy úhel ADB má také velikost 45°. Trojúhelník ABD je rovnoramenný, tedy úhly BAD a ABD u základny jsou shodné. Součet vnitřních úhlů trojúhelníku ABD je 180°, tedy velikost úhlu BAD je 67,5° $(2 \cdot 67{,}5 + 45 = 180)$.



Součet vnitřních úhlů čtyřúhelníku $ABCD$ je $360°$, tedy velikost úhlu BCD je $67{,}5°$ $(67{,}5 + 90 + 67{,}5 + 135 = 360)$.



Poznámka. Velikost úhlu BCD lze dopočítat v rámci trojúhelníku BCD: úhel BDC je pravý a úhel DBC je rozdílem pravého úhlu ABC a úhlu ABD, jehož velikost známe z předchozího.