# I. kolo kategorie Z6

**Z6–I–1**

V následujícím sčítacím algebrogramu odpovídají různá písmena různým číslicím, stejná stejným:

$$\begin{array}{r} T\,O\,N\,A \\ O\,N\,A \\ N\,A \\ A \\ \hline 8\;6\;5\;4 \end{array}$$

Nahraďte písmena číslicemi tak, aby byl výpočet správný. Najděte všechny možnosti.
(*I. Jančigová*)

**Možné řešení.** Písmena budeme odhalovat odzadu (od jednotek k tisícovkám). Součet čtyř $A$ má končit číslicí 4, což je možné buď pro $A = 1$, nebo pro $A = 6$. Oba případy rozebereme:

- Pro $A = 1$ je $4 \cdot A = 4$ a nedochází k přechodu přes desítku. Součet tří $N$ má být 5, což je možné pouze pro $N = 5$. Nyní $3 \cdot N = 15$ a přes desítku přechází 1. Součet dvou $O$ a 1 má být 6, což není možné ($2O + 1$ je liché a 6 je sudé). Tento případ tedy k řešení nevede.
- Pro $A = 6$ je $4 \cdot A = 24$ a přes desítku přechází 2. Součet tří $N$ a 2 má být 5, což je možné pouze pro $N = 1$. Nyní $3 \cdot N + 2 = 5$ a nedochází k přechodu přes desítku. Součet dvou $O$ má být 6, což je možné buď pro $O = 3$, nebo $O = 8$. Příslušná doplnění vypadají takto:

$$\begin{array}{r} 8\;3\;1\;6 \\ 3\;1\;6 \\ 1\;6 \\ 6 \\ \hline 8\;6\;5\;4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7\;8\;1\;6 \\ 8\;1\;6 \\ 1\;6 \\ 6 \\ \hline 8\;6\;5\;4 \end{array}$$

Písmena lze nahradit číslicemi dvěma právě uvedenými způsoby.

**Z6–I–2**

Od 1. ledna byl pan Novák zaměstnán v nové práci. Nástupní výše jeho platu byla 1 550 eur měsíčně. Protože se osvědčil, od jistého měsíce v prvním půlroce mu byl zvýšen plat o celý počet eur. Za celý rok si vydělal 20 000 eur.

Za který měsíc si pan Novák poprvé vydělal více a o kolik? Určete všechny možnosti.
(*M. Macko*)

**Možné řešení.** Pokud by panu Novákovi plat nezvýšili, tak by si za celý rok vydělal $12 \cdot 1\,550 = 18\,600$ eur. Rozdíl mezi tímto a jeho skutečným výdělkem je $20\,000 - 18\,600 = 1\,400$ eur.

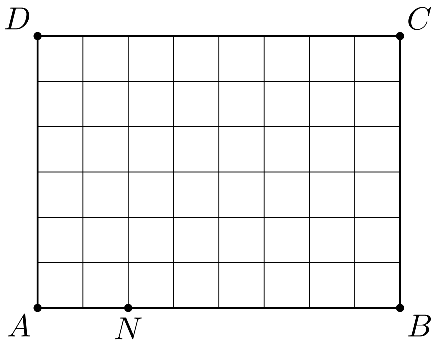
Částka 1 400 eur je násobkem počtu eur, o který mu byl zvýšen měsíční plat. Zvýšený plat dostával alespoň půl roku, tedy nás zajímají dělitelé čísla 1 400 v rozmezí od 6 do 12. Jediní dělitelé v tomto rozmezí jsou 7, 8 a 10:

- Sedm měsíců vyššího příjmu znamená od června, a to o částku $1\,400 : 7 = 200$ eur.
- Osm měsíců vyššího příjmu znamená od května, a to o částku $1\,400 : 8 = 175$ eur.
- Deset měsíců vyššího příjmu znamená od března, a to o částku $1\,400 : 10 = 140$ eur.

Pan Novák si poprvé vydělal více buď za březen o 140 eur, nebo za květen o 175 eur, nebo za červen o 200 eur.

## Z6–I–3

Vrcholy obdélníku $ABCD$ jsou mřížovými body čtvercové sítě a bod $N$ je mřížovým bodem na straně $AB$:

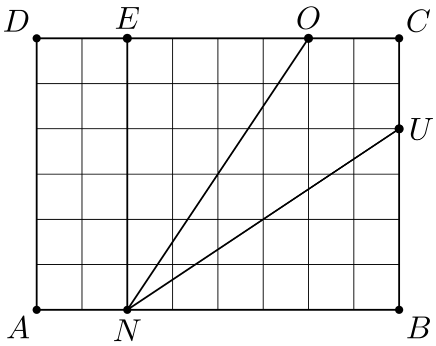



Rozdělte obdélník $ABCD$ třemi úsečkami se společným bodem $N$ na čtyři části se stejnými obsahy. *(D. Kovalčíková)*

**Možné řešení.** Obsahy budeme vyjadřovat pomocí počtů nejmenších čtverečků dané sítě.

Obdélník $ABCD$ sestává z $8 \cdot 6 = 48$ čtverečků. Tedy každá ze čtyř částí bude mít obsah $48 : 4 = 12$ čtverečků. Každá ze tří dělicích úseček má jeden krajní bod $N$, druhý bude na obvodu obdélníku $ABCD$.

Pokud probereme mřížové body na obvodu obdélníku $ABCD$, najdeme vyhovující řešení:



Skutečně:

- obsah obdélníku $NEDA$ je $2 \cdot 6 = 12$ čtverečků,
- obsah každého z pravoúhlých trojúhelníků $NOE$ a $NBU$ je $6 \cdot 4/2 = 12$ čtverečků,
- obsah čtyřúhelníku $NUCO$ nemůže být jiný $(48 - 3 \cdot 12 = 12)$.

**Poznámka.** Obsah čtyřúhelníku $NUCO$ lze vyjádřit přímo pomocí trojúhelníků $NUC$ a $NOC$, z nichž každý má obsah $2 \cdot 6/2 = 6$ čtverečků.

**Z6–I–4**

Veronika dostala jedno trojmístné a jedno dvojmístné číslo. Trojmístné číslo zaokrouhlila na stovky a dvojmístné zaokrouhlila na desítky. Rozdíl zaokrouhlených čísel byl 500.

Jaký nejmenší a jaký největší mohl být rozdíl nezaokrouhlených čísel? (*M. Macko*)

**Možné řešení.** Dvojmístná čísla zaokrouhlená na desítky jsou násobkem 10 v rozmezí od 10 do 100. Trojmístná čísla zaokrouhlená na stovky jsou násobkem 100 v rozmezí od 100 do 1000.

Rozdíl zaokrouhlených čísel byl 500, tedy nemohl vzniknout jinak než $600 - 100$. Trojmístné číslo bylo zaokrouhleno na 600, tedy to bylo číslo v rozmezí od 550 do 649. Dvojmístné číslo bylo zaokrouhleno na 100, tedy to bylo číslo v rozmezí od 95 do 99.

Nejmenší možný rozdíl nezaokrouhlených čísel je $550 - 99 = 451$, největší možný rozdíl je $649 - 95 = 554$.

**Z6–I–5**

Peťa má ke každému dnu v týdnu přiřazenu barvu: pondělí modrou, úterý zelenou, středě bílou, čtvrtku červenou, pátku oranžovou, sobotě šedou a neděli hnědou. V těchto barvách nosí i ponožky, a to tak, že na pravé noze má ponožku barvy dne, avšak na levé noze nemá ponožku barvy tohoto dne, ani dne následujícího. (Např. v sobotu má na pravé noze šedou ponožku a na levé nemá šedou, ani hnědou.)

Určete, který je den, jestliže předevčírem měl Peťa na levé noze modrou ponožku, včera měl červenou a dnes má hnědou. (*M. Dillingerová*)

**Možné řešení.** Hnědou ponožku na levé noze Peťa nenosí v neděli ani v sobotu. Dnes tedy není neděle ani sobota.

Červenou ponožku na levé noze nenosí ve čtvrtek ani ve středu. Tedy včera nebyl čtvrtek ani středa, dnes není pátek ani čtvrtek.

Modrou ponožku na levé noze nenosí v pondělí ani v neděli. Tedy předevčírem nebylo pondělí ani neděle, dnes není středa ani úterý.

Vyloučili jsme všechny dny v týdnu kromě pondělí. Dnes je pondělí.

**Poznámka.** Předchozí úvahy jsou zestručněny v následující tabulce. Na prvních dvou řádcích zkracujeme názvy dnů v týdnu a odpovídajících barev, na zbylých řádcích kontrolujeme podmínky kladené na Peťovu levou ponožku (1 – možné, 0 – nemožné):

| den | ... | po | út | st | čt | pá | so | ne | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| barva | ... | mo | ze | bí | če | or | še | hn | ... |
| hn dnes | ... | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | ... |
| če včera | ... | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | ... |
| mo předvč. | ... | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | ... |

**Z6–I–6**

Obdélníkový park má obvod 228 metrů. Ve vrcholech obdélníku a na jeho stranách rostlo 38 okrasných keřů tak, že vzdálenosti mezi každými dvěma sousedními keři byly stejné. Na dvou protilehlých stranách obdélníku zasadil zahradník mezi každé dva keře jeden další. Tím zvýšil počet keřů po obvodu parku na 60.

Určete rozměry parku. (*M. Macko*)

**Možné řešení.** Keře byly ve vrcholech obdélníku a pak rovnoměrně po celém obvodu. Původní vzdálenost mezi sousedními keři byla $228 : 38 = 6$ metrů.

Nově bylo vysazeno $60 - 38 = 22$ keřů, tedy na každou ze dvou protilehlých stran obdélníku 11 keřů. Tyto keře byly zasazeny do mezer mezi keře, které tam už rostly. Tedy tyto strany obdélníku měří $11 \cdot 6 = 66$ metrů, tzn. v součtu 132 metrů.

Do obvodu celého obdélníku chybí $228 - 132 = 96$ metrů, a to odpovídá součtu délek druhé dvojice protilehlých stran. Tedy tyto strany měří $96 : 2 = 48$ metrů.

Rozměry parku jsou 66 a 48 metrů.

**Poznámka.** Na každé ze stran obdélníku, kam zahradník sázel nové keře, jich původně bylo 12 (sázel do 11 mezer). Tedy na těchto dvou stranách jich v součtu bylo 24 a do původního počtu jich chybělo 14. To odpovídá 7 dalším keřům na každé ze dvou zbylých stran (kromě těch ve vrcholech). Těchto 7 keřů spolu s těmi ve vrcholech dělí příslušné strany na 8 stejných dílů. Tedy tyto strany vskutku měří $8 \cdot 6 = 48$ metrů.