Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z8

Z8–I–1

Najděte všechny trojice navzájem různých prvočísel p_1, p_2, p_3, pro která platí

$$(p_2 - p_1) \cdot (p_3 - p_1) = 195.$$

(E. Novotná)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Vyberte všechny trojice jednomístných prvočísel $p_1 < p_2 < p_3$ a určete výsledek součinu

$$(p_2 - p_1) \cdot (p_3 - p_1).$$

N2. Najděte všechny dvojice přirozených čísel x a y, pro která platí

$$(x - y) \cdot (x + y) = 105.$$

N3. Najděte všechny dvojice prvočísel, pro která platí, že součin jejich součtu a jejich rozdílu je roven 117.

D1. Najděte všechny dvojice navzájem různých prvočísel p_1 a p_2, pro která platí

$$p_1 \cdot (p_1 + p_2) \cdot (p_1 - p_2) = 315.$$

Z8–I–2

Pro rovnoběžníky $ABCD$ a $KLMN$ platí:

- *bod K je středem úsečky CD,*
- *bod K je průsečíkem přímky CD s osou úsečky BC,*
- *bod L je průsečíkem přímky AB s osou úsečky CD,*
- *bod N je průsečíkem přímky AB s osou úsečky BC,*
- *úhel BAD má velikost $60°$.*

Určete poměr obsahů rovnoběžníků $ABCD$ a $KLMN$. *(M. Macko)*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. V obdélníku $ABCD$ je bod M středem strany AB. Určete poměr obsahů trojúhelníku AMD a čtyřúhelníku $MBCD$.

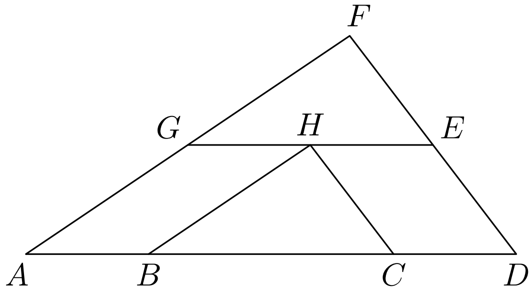
N2. V trojúhelníku ABC platí, že bod M je středem strany AC a úsečky MA, MB a AB jsou shodné. Určete poměr obsahů trojúhelníků ABM a MBC.

N3. Na stranách rovnostranného trojúhelníku ABC jsou body K, L a M tak, že platí:

- bod K je středem strany BC,
- bod L je průsečíkem strany AB s osou úsečky KB,
- bod M je středem úsečky BL.

Určete poměr obsahů trojúhelníků KLM a ABC.

D1. Obecný trojúhelník ADF je rozdělen na dva trojúhelníky GEF a BCH a dva rovnoběžníky $ABHG$ a $CDEH$. Trojúhelníky GEF a BCH jsou shodné a bod H leží na těžnici trojúhelníku ADF procházející vrcholem F. Určete poměr obsahů trojúhelníku GEF a rovnoběžníku $CDEH$.



Z8–I–3

Tomáš sbírá pohlednice z Islandu, Anglie a Norska. Z každé země má alespoň jednu pohlednici, celkem jich má 40. Pohlednic z Anglie má více než pohlednic z Norska. Pohlednic z Islandu má více než pětinásobek a méně než šestinásobek počtu pohlednic z Anglie.

Ze kterých zemí jsou pohlednice, jejichž počet v Tomášově sbírce lze určit jednoznačně? *(E. Novotná)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Laura, Aleš a Ivan sbírali na táboře kešky. Každý našel alespoň jednu, dohromady jich nasbírali 23 a Laura jich nasbírala pětkrát tolik co Ivan. Kolik kešek mohl nasbírat Aleš? Určete všechny možnosti.

N2. Jakub dal kamarádům za úkol uhodnout číslo, které si myslí. Prozradil, že se jedná o dvojmístné číslo menší než sedminásobek největšího jednomístného čísla a větší než druhá mocnina počtu dnů v týdnu. Kdyby navíc svoje číslo vydělil osmi, dostal by počet svých kšiltovek. Mohou kamarádi určit Jakubovo myšlené číslo, i když neznají počet jeho kšiltovek?

N3. Andrea sbírá pohlednice z Arménie, Belgie a Číny. Z každé země má alespoň jednu pohlednici. Pohlednic z Arménie má méně než pohlednic z Belgie. Pohlednic z Číny má více než pětinásobek a méně než šestinásobek počtu pohlednic z Belgie. Zdeněk se z těchto informací snažil zjistit, kolik vlastně má Andrea pohlednic, a nevěděl si rady. Andrea mu pomohla sdělením, že v jejím případě jsou těmito omezeními počty pohlednic z jednotlivých zemí popsány jednoznačně. Kolik má Andrea pohlednic?

D1. Libor sbírá pohlednice z Andorry, Brazílie, Černé Hory a Dánska, celkem jich má méně než 40. Pohlednic z Brazílie má více než dvojnásobek a méně než trojnásobek počtu pohlednic z Andorry. Pohlednic z Černé Hory má více než pohlednic z Andorry a méně než pohlednic z Brazílie. Pohlednic z Dánska má dvakrát tolik co pohlednic z Brazílie. Kolik nejméně a kolik nejvíce pohlednic může mít Libor?

Z8–I–4

Žáci napsali první písemku s průměrným hodnocením 84 bodů. Stejní žáci napsali druhou písemku s průměrným hodnocením 70 bodů. Čtyři z těchto žáků měli v obou písemkách po 63 bodech. Průměrné hodnocení ostatních žáků ve druhé písemce bylo 72 bodů.

Určete průměrné hodnocení ostatních žáků v první písemce. *(I. Jančigová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Adam, Bořek, Cyril, Dan a Emil porovnávali svoje časy v běhu na 60 metrů. Bořek doběhl stejně jako Cyril za 11,2 vteřin, Emil doběhl za 9,3 vteřin a Dan za 10,8 vteřin. Adam svůj čas nechtěl prozradit, ale všichni věděli, že jejich průměrný čas byl 10,6 vteřin. Jaký byl Adamův čas?

N2. Během jednoho roku zachránil šestičlenný tým superhrdinů řadu měst, průměrně každý 11. Thor, Hulk a Iron Man zachránili každý stejné množství měst, Kapitán Amerika jich zachránil 5, Ant-Man 7 a Hawkeye 6. Kolik měst zachránil Hulk?

N3. Průměrná výška deseti nejvyšších hor světa je 8 378 metrů nad mořem. Jak by se změnila průměrná výška, pokud bychom z tohoto seznamu vynechali Annapurnu (8 091 m), K2 (8 611 m) a Makalu (8 485 m)?

D1. V základní škole U Tří dubů, kam chodí i Zikmund, každoročně pořádají vědomostní soutěž, v níž každý soutěžící může získat nejvíce 15 bodů. Letos byl průměrný bodový zisk soutěžících zaokrouhlený na desetiny roven 10,4. Zikmund si po soutěži uvědomil, že jednu otázku si špatně přečetl a odpovídal na něco jiného. Mohl tak mít o 4 body více a průměrný bodový zisk zaokrouhlený na desetiny by se tím zvýšil na 10,6. Určete, kolik nejméně a kolik nejvíce dětí letos U tří dubů soutěžilo.

Z8–I–5

Je dána kružnice k se středem S a poloměrem 6 cm a přímka p procházející bodem S. Sestrojte obdélník $ABCD$ tak, aby platilo:

- *vrcholy A a B leží na přímce p,*
- *kružnice k se dotýká strany CD,*
- *kružnice k protíná stranu AD v bodě K a stranu BC v bodě L,*
- *$|AK| = |CL| = 1{,}5$ cm.*

(M. Petrová)

Návodné a doplňující úlohy

N1. Narýsujte čtverec $ABCD$ o straně délky 5 cm. Poté narýsujte kružnici vepsanou a kružnici opsanou čtverci $ABCD$.

N2. Je dána kružnice k se středem S a poloměrem 4 cm. Narýsujte obdélník $ABCD$, jehož strany AB, CD a AD se dotýkají kružnice k a délky stran BC a CD jsou v poměru $2 : 3$.

N3. Je dána kružnice k se středem S a poloměrem 6 cm. Narýsujte obdélník $ABCD$ tak, aby platilo:

- bod S leží na straně AB,
- bod B leží na kružnici k,
- kružnice k se dotýká strany CD,
- kružnice k protíná stranu AD v jejím středu.

D1. Je dána kružnice k se středem S. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC tak, aby platilo:

- bod S leží na straně AB,
- bod C leží na kružnici k,

- ramena AC a BC protínají kružnici k v bodech N a O,
- úsečka NO je střední příčkou trojúhelníku ABC.

Z8–I–6

Jonáš a Michal sestavili každý svůj osmiboký jehlan s devíti různými čísly na jeho různých stěnách. Všechna čísla byla větší než 10, menší než 30 a žádné nebylo dělitelné čtyřmi. Pro každý vrchol však součet čísel na všech stěnách, které ho obsahovaly, byl dělitelný čtyřmi. Jonáš tvrdil, že na dvou bočních stěnách má čísla 14 a 15. Michal tvrdil, že na dvou bočních stěnách má čísla 14 a 17.

Kdo z chlapců měl pravdu? *(K. Pazourek)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Silva zkoumala čtyřstěn, který se objevil na její lavici. Na čtyřech stěnách byla napsána čtyři různá čísla, žádné z nich nebylo dělitelné třemi. Pro každý vrchol však součet čísel na třech stěnách, které ho obsahovaly, dělitelný třemi byl. Která čísla mohla být napsána na stěnách čtyřstěnu? Najděte alespoň dvě možnosti.

N2. Karel popsal stěny krychle tak, že na různých stěnách byla různá přirozená čísla, součet čísel na každých dvou protilehlých stěnách byl dělitelný čtyřmi a největší z použitých čísel bylo co nejmenší. Která čísla Karel použil?

N3. Jindra popsal stěny krychle tak, že na různých stěnách byla různá přirozená čísla, součet čísel na každých dvou sousedních stěnách byl dělitelný čtyřmi a největší z použitých čísel bylo co nejmenší. Která čísla Jindra použil?

D1. Vrcholům šestibokého jehlanu jsou přiřazena přirozená čísla tak, že různé vrcholy mají různá čísla a pro každou stěnu je součet čísel u všech jejích vrcholů dělitelný čtyřmi. Ukažte, že zbytek, který dává číslo u hlavního vrcholu po dělení čtyřmi, nemůže být jiný než nula.