Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z9

Z9–I–1

Do rohových políček tabulky 3×3 jsou vepsána čísla jako na obrázku:

3		*6*
12		*15*

Do prázdných políček doplňte kladná celá čísla tak, aby součin čísel ve všech řádcích a sloupcích byl stejný. Najděte všechny možnosti. *(J. Zhouf)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. V následující tabulce jsou a, b, c kladná celá čísla taková, že hodnoty v sousedních políčkách se rovnají. Najděte tři nejmenší řešení.

$5a$	$7b$	$8c$

N2. V následující tabulce jsou a, b, c kladná celá čísla taková, že hodnoty v sousedních políčkách se rovnají. Najděte tři nejmenší řešení.

$20a$	$21b$	$12c$

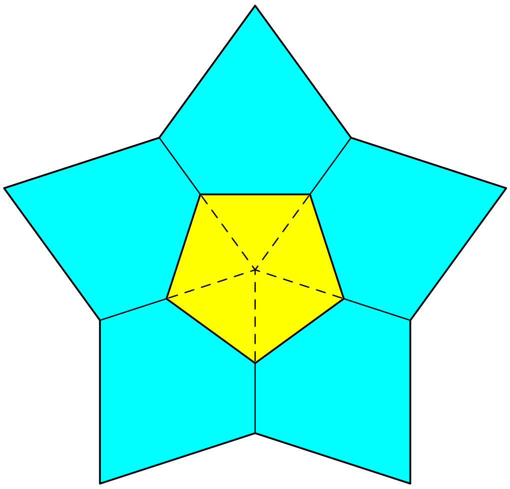
N3. Pro kladná sudá čísla a, b, c platí, že součiny $a \cdot b$ a $b \cdot c$ se rovnají a součin $a \cdot b \cdot c$ je dvojmístný a větší než 75. Jaký může být součet těchto tří čísel? Najděte všechny možnosti.

D1. Obdélník je třemi úsečkami rozdělen na tři čtverce a tři menší obdélníky. Všechny dílčí pravoúhelníky mají délky všech stran v cm vyjádřeny celými čísly. Obsah jednoho z malých obdélníků je $14\,\mathrm{cm}^2$. Jaký může být obsah daného obdélníku? Najděte všechny možnosti.

Z9–I–2

Útvar na obrázku je vytvořen z pěti shodných azurových kosočtverců a jednoho žlutého pravidelného pětiúhelníku, který kosočtverce částečně překrývá. Kosočtverce sousedí celými stranami a na nich leží vrcholy pětiúhelníku. Poměr velikostí poloměru kružnice opsané pětiúhelníku a strany kosočtverce je $4 : 7$.

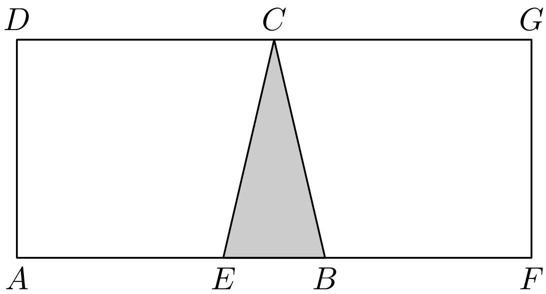
Rozhodněte, zda nepřekrytá část každého kosočtverce má větší, stejný, nebo menší obsah než pětiúhelník. *(M. Dományová)*



NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Rovnostranný trojúhelník ABC má stranu délky 24 cm. Na straně BC jsou body K a L tak, že $|BK| = |KL| = |LC|$. Na straně AC jsou body M a N tak, že $|AM| = |MN| = |NC|$. Určete postupný poměr obsahů lichoběžníků $ABKM$, $MKLN$ a trojúhelníku NLC. Zkuste úlohu řešit i bez znalosti délky strany trojúhelníku ABC.

N2. Dva shodné pravoúhlé lichoběžníky $ABCD$ a $FECG$ se překrývají v trojúhelníku EBC. Obsah trojúhelníku EBC tvoří 18 % obsahu lichoběžníku $ABCD$. Určete poměr délek úseček AB a CD.



N3. Na stranách AB, BC, CD a DA kosočtverce $ABCD$ jsou postupně dány body E, F, G a H tak, že platí $|AE| : |EB| = |CG| : |GD| = 1 : 4$ a $|BF| : |FC| = |DH| : |HA| = 3 : 2$. Bod P je průsečíkem přímek EG a HF. Určete poměr obsahů čtyřúhelníků $AEPH$ a $EBFP$.

D1. Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami $|AB| = 12$ cm, $|CD| = 4$ cm a výškou 6 cm. Na ramenech AD, BC leží body E, F tak, že lichoběžníky $ABFE$ a $EFCD$ mají stejný obsah. Vypočítejte délku úsečky EF.

Z9–I–3

Na tabuli je napsáno několik po sobě jdoucích přirozených čísel počínaje jedničkou. Každé z těchto čísel má buď azurovou, nebo žlutou barvou. Součet každých dvou různobarevných čísel je prvočíslem, součet každých dvou stejnobarevných čísel je složeným číslem.

Kolik nejvíce čísel může být napsáno na tabuli? *(P. Bak)*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Seznamte se s metodou Eratosthenova síta a najděte pomocí něj všechna prvočísla menší než 100.

N2. Obarvěte čísla 1, 2 a 3 podle pravidel ze soutěžní úlohy.

N3. Najděte všechny dvojice přirozených čísel menších než 6, jejichž součty jsou složená čísla.

D1. Leonardo si vypisoval členy Fibonacciho posloupnosti: Začal dvěma jedničkami, k nim připsal jejich součet a v každém dalším kroku doplnil součet předchozích dvou čísel. Několik prvních členů vypadalo takto: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Ukažte, že číslo na 9999. místě je složené.

Z9–I–4

Přirozené číslo se nazývá čtverečkové, pokud jeho zápis obsahuje číslici nebo skupinu po sobě jdoucích číslic, jež jsou zápisem druhé mocniny kladného celého čísla. (Např. čísla 257 a 725 jsou čtverečková, čísla 275 a 572 nikoli.)

Určete počet všech dvojmístných čtverečkových čísel. *(M. Dillingerová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Najděte:

a) nejmenší trojmístné čtverečkové číslo;
b) stoprvní trojmístné čtverečkové číslo;
c) stotřicáté trojmístné čtverečkové číslo.

N2. Kolik trojmístných čtverečkových čísel začíná číslicí 7 a obsahuje číslici 5?

N3. Přirozené číslo nazveme *patrojkové*, jestliže obsahuje číslici 3, ale není dělitelné třemi. Najděte deset nejmenších patrojkových čísel.

D1. Přirozené číslo nazveme *supersloženým*, pokud jeho zápis obsahuje právě dvě číslice, z nichž každá představuje jednomístné složené číslo. (Např. číslo 144 je supersložené, číslo 124 nikoli.) Kolik je trojmístných supersložených čísel?

Z9–I–5

V lyžařském oddíle se počet všech dětí snížil o 10 %, přitom poměr děvčat vůči všem dětem vzrostl z 50 % na 55 %.

O kolik procent se změnil počet děvčat? *(I. Jančigová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Janečkovi natrhali 30 kg třešní. Z 30 % třešní vyrobili šťávu, polovinu zbylých třešní zpracovali na marmeládu. Nový zbytek rozdělili na tři stejné díly, dva díly usušili a jeden díl snědli. Kolik procent všech třešní Janečkovi usušili?

N2. Ve firmě pije 45 % zaměstnanců čaj, ostatní pijí kávu. Kávu sladí o polovinu víc zaměstnanců než je těch, kteří ji nesladí. Kolik procent všech zaměstnanců pije hořkou kávu?

N3. V učitelském sboru je p vyučujících, z toho $(100-p)$ % tvoří ženy a mužů je 36. Kolik vyučujících je ve sboru?

D1. V pytlíku byly rohlíky, z nichž 80 % bylo s kmínem, ostatní s mákem. Po snědení dvou rohlíků s kmínem tvořil tento druh rohlíků 75 % všech. Kolik rohlíků bylo s mákem?

Z9–I–6

Kružnice k a l se zvnějšku dotýkají a poloměr kružnice k je stejný jako průměr kružnice l. Bod S je středem kružnice k, bod T je bodem dotyku kružnic, bod A leží na kružnici l mimo spojnici středů kružnic a bod M je středem úsečky AS.

Dokažte, že úhel ATM je pravý. *(L. Komín)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Připomeňte si a zformulujte Thaletovu větu.

N2. V obecném trojúhelníku ABC značí D a E paty výšek na strany BC a AC. Dokažte, že body A, B, D a E leží na jedné kružnici.

N3. Na kružnici k se středem S jsou dány navzájem různé body A, B, C, D tak, že platí $S \in AC$ a $BS \| AD$. Dokažte, že tečna ke kružnici k s bodem dotyku B je rovnoběžná s přímkou CD.

D1. Kružnice k a l se protínají v různých bodech A a B. Body C a D jsou krajními body průměrů kružnic k a l procházejících společným bodem A. Dokažte, že body B, C a D leží na jedné přímce.