74. ročník Matematické olympiády (2024/2025)

Ústřední kolo kategorie Z9

24. dubna 2025

1. Pro každé kladné celé číslo $n \geqq 1$ uvažme n-místné číslo

$$987654321987654321987\ldots$$

(Tedy např. pro $n = 3$ uvažujeme číslo 987.) Je některé z těchto čísel prvočíslo? Svou odpověď zdůvodněte.

2. Rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ se základnami splňujícími $|AB| > |CD|$ má vepsanou kružnici. Dokažte, že osa úhlu u vrcholu C dělí lichoběžník na dvě části o stejném obsahu.

3. Královna si předvolala své dva kouzelníky a dala jim následující úkol. První kouzelník má vybrat 7 navzájem různých kladných celých čísel se součtem 100 a pošeptat je královně. Královna pak druhému kouzelníkovi řekne čtvrté největší z těchto čísel. Druhý kouzelník musí přijít na to, kterých sedm čísel první kouzelník vybral, jinak královna oba kouzelníky popraví.

Může první kouzelník vybrat takových 7 čísel, že když se druhý kouzelník dozví jen čtvrté největší z nich, bude schopen jednoznačně určit všech sedm čísel, která první kouzelník vybral? Svou odpověď zdůvodněte.

4. Máme najednou převézt několik beden z místa A na místo B. O bednách víme jen to, že všechny dohromady váží 270 kg a že každá z nich váží nejvýše 7 kg. Různé bedny mohou být různě těžké a jejich hmotnosti nemusí být celá čísla. Máme k dispozici vozíky s nosností 30 kg. Každou bednu musíme naložit na nějaký vozík a celkem chceme vozíků použít co nejméně.

a) Dokažte, že pro některé sady beden nám 10 vozíků nebude stačit.
b) Dokažte, že 12 vozíků k převozu jistě stačí.
c) Rozhodněte, zda k převozu jistě stačí 11 vozíků.

Soutěžící má na vypracování úloh 3 hodiny čistého času; případné dotazy k textu zadání mohou být zodpovězeny v prvních 20 minutách. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby. Knihy, kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou.

1. *Pro každé kladné celé číslo $n \geqq 1$ uvažme n-místné číslo*

$$987654321987654321987\ldots$$

(Tedy např. pro $n = 3$ uvažujeme číslo 987.) Je některé z těchto čísel prvočíslo? Svou odpověď zdůvodněte.

Řešení. Ukážeme, že všechna čísla jsou složená a žádné z nich tak prvočíslem není. Rozebereme tři případy podle poslední číslice.

- Pokud číslo končí jednou z číslic 2, 4, 6, 8, pak je dělitelné dvěma (a je větší než 2), takže to jistě není prvočíslo.
- Podobně pokud číslo končí číslicí 5, pak je dělitelné pěti (a je větší než 5), takže není prvočíslo.
- Zbylá čísla končí jednou z číslic 1, 3, 7, 9 (a jsou větší než 3). Ukážeme, že všechna jsou dělitelná třemi. K tomu použijeme známé kritérium dělitelnosti: *Číslo je dělitelné třemi právě tehdy, když je jeho ciferný součet dělitelný třemi.*

  Čísla 9, 987, 9876543 a 987654321 mají ciferný součet dělitelný třemi (po řadě $9 = 3\cdot 3$, $24 = 3\cdot 8$, $42 = 3\cdot 14$ a $45 = 3\cdot 15$), takže jsou sama dělitelná třemi. A jelikož 987654321 má ciferný součet dělitelný třemi, budou mít i všechna „delší“ čísla ciferný součet dělitelný třemi – libovolné číslo tvořené nejdříve k bloky 987654321 a následně jedním z bloků 9, 987, 9876543 nebo 987654321 bude mít totiž ciferný součet rovný $45k + 9$, $45k + 24$, $45k + 42$ nebo $45k + 45$, což jsou všechno čísla dělitelná třemi.

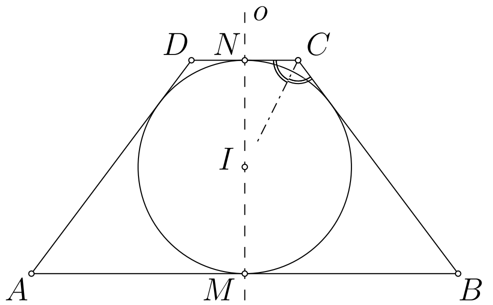
Poznámka. Na klíčové tvrzení, že každé z uvažovaných čísel je dělitelné dvěma, třemi nebo pěti, lze přijít zkoušením malých případů. Platí

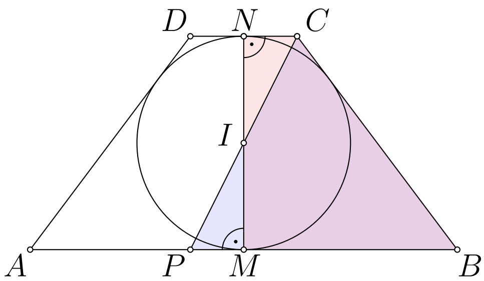
$$9 = 3\cdot 3,\quad 98 = 2\cdot 7^2,\quad 987 = 3\cdot 7\cdot 47,\quad 9876 = 2^2\cdot 3\cdot 823,\quad 98765 = 5\cdot 19753,\quad \ldots$$

2. *Rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ se základnami splňujícími $|AB| > |CD|$ má vepsanou kružnici. Dokažte, že osa úhlu u vrcholu C dělí lichoběžník na dvě části o stejném obsahu.*

Řešení. Označme I střed kružnice vepsané a M, N po řadě středy základen AB, CD. Jelikož lichoběžník je rovnoramenný, má osu souměrnosti o a body M, I, N na této ose všechny leží (obrázek vlevo). Navíc platí, že bod I je středem úsečky MN – body M a N jsou totiž body dotyku vepsané kružnice se základnami, takže úsečky IM a IN jsou obě poloměry této kružnice.

Všimněme si, že bod I leží i na ose úhlu u vrcholu C – tato osa je totiž množinou všech bodů (konvexního) úhlu BCD, které mají stejnou vzdálenost od ramen CB a CD, což střed kružnice vepsané I jistě splňuje.



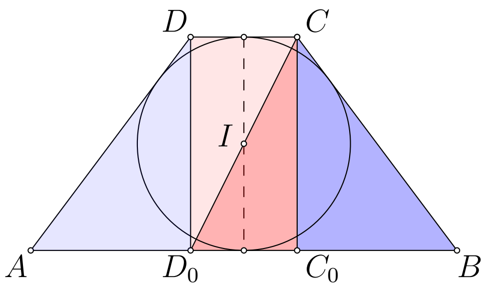


Označme konečně P průsečík přímky CI se základnou AB (obrázek vpravo). Naším úkolem je ukázat, že obsah trojúhelníku PBC je roven polovině obsahu lichoběžníku $ABCD$. Zaměřme se na pravoúhlé trojúhelníky CNI a PMI. Ty jsou shodné podle věty *usu*, jelikož kromě pravých úhlů a shodných odvěsen NI a MI mají i shodné vrcholové úhly CIN a PIM. Mají proto stejné obsahy. Výměnou S_{PMI} za S_{CNI} v S_{PBC} tak dostaneme požadované

$$S_{PBC} = S_{PMI} + S_{IMBC} = S_{CNI} + S_{IMBC} = S_{CNMB} = \tfrac{1}{2} S_{ABCD},$$

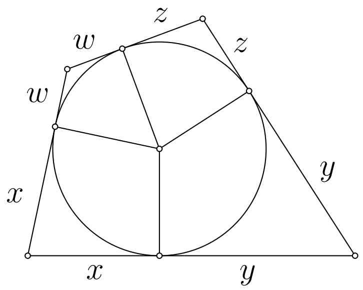
kde poslední rovnost platí, jelikož osa souměrnosti dělí lichoběžník na dvě části stejného obsahu.

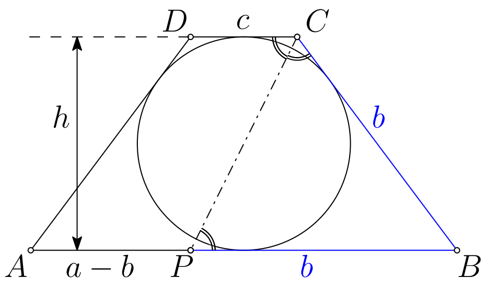
Poznámka. Jakmile si rozmyslíme, že I je střed úsečky MN a CI je osa úhlu u vrcholu C, lze řešení dokončit i následovně. Označme C_0 a D_0 paty kolmic po řadě z bodů C a D na základnu AB. Úsečky CC_0 a DD_0 dělí lichoběžník na tři části: dva shodné trojúhelníky ADD_0, BCC_0 (na obrázku modře) a obdélník D_0C_0CD. Jelikož bod I je středem tohoto obdélníku, prochází přímka CI bodem D_0. Přímka CI tak půlí obdélník D_0C_0CD a navíc na každé její straně leží jeden ze dvou shodných trojúhelníků ADD_0, BCC_0. Přímka CI proto půlí i obsah lichoběžníku $ABCD$.



Jiné řešení. V tomto řešení vyjádříme obsahy obou částí pomocí délek stran lichoběžníku a jeho výšky. Požadovaná rovnost pak vyplyne ze známého tvrzení, které říká, že ve čtyřúhelníku s vepsanou kružnicí (tzv. *tečnovém čtyřúhelníku*) jsou součty délek protilehlých stran shodné (důkaz je naznačený na obrázku vlevo). Označme délky stran standardně $|AB| = a$, $|BC| = |DA| = b$, $|CD| = c$. V našem případě tedy platí $a + c = 2b$.

Označme P průsečík osy úhlu u vrcholu C se základnou AB (obrázek vpravo). Jelikož CP je osa úhlu u vrcholu C, platí $|\sphericalangle PCB| = |\sphericalangle PCD|$. Jelikož základny AB a CD jsou rovnoběžné, pro střídavé úhly platí $|\sphericalangle PCD| = |\sphericalangle CPB|$. Trojúhelník BCP má proto shodné úhly u vrcholů P a C, takže je rovnoramenný. Odtud máme $|PB| = |BC| = b$ a $|AP| = a - b$.





Obsah trojúhelníku PBC a lichoběžníku $APCD$ vyjádříme pomocí společné výšky h. Platí

$$S_{PBC} = \frac{1}{2} \cdot |PB| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$$

a

$$S_{APCD} = \frac{1}{2} \cdot (|AP| + |CD|) \cdot h = \frac{1}{2}(a - b + c) \cdot h.$$

K dokončení důkazu tak stačí ukázat, že platí $b = a - b + c$ neboli $2b = a + c$, což je ono známé tvrzení ze začátku řešení.

3. *Královna si předvolala své dva kouzelníky a dala jim následující úkol. První kouzelník má vybrat 7 navzájem různých kladných celých čísel se součtem 100 a pošeptat je královně. Královna pak druhému kouzelníkovi řekne čtvrté největší z těchto čísel. Druhý kouzelník musí přijít na to, kterých sedm čísel první kouzelník vybral, jinak královna oba kouzelníky popraví.*

Může první kouzelník vybrat takových 7 čísel, že když se druhý kouzelník dozví jen čtvrté největší z nich, bude schopen jednoznačně určit všech sedm čísel, která první kouzelník vybral? Svou odpověď zdůvodněte.

Řešení. Ukážeme, že kouzelníci mohou úkol splnit. První kouzelník musí vybrat takových 7 různých čísel se součtem 100, že ze znalosti jen toho čtvrtého největšího z nich už bude druhý kouzelník jednoznačně schopen určit celou sedmici. Vyplatí se přemýšlet nad sedmicemi čísel, ve kterých je šest neprozrazených čísel buď hodně malých, nebo hodně velkých.

Ukážeme, že vyhovuje sedmice čísel $\{1, 2, 3, 22, 23, 24, 25\}$, která má požadovaný součet $1 + 2 + 3 + 22 + 23 + 24 + 25 = 100$. Pokud první kouzelník královně pošeptá tuto sedmici, královna druhému kouzelníkovi řekne číslo 22. Jelikož druhý kouzelník ví, že 22 je čtvrté největší číslo v sedmici, může dále uvažovat následovně:

- Tři čísla větší než 22 jsou navzájem různá, musejí proto mít součet alespoň $23 + 24 + 25 = 72$. Přitom jediná trojice čísel větších než 22 se součet rovným 72 je právě trojice $\{23, 24, 25\}$.
- Tři čísla menší než 22 jsou kladná a navzájem různá, musejí proto mít součet alespoň $1 + 2 + 3 = 6$. Přitom jediná trojice čísel menších než 22 se součet rovným 6 je právě trojice $\{1, 2, 3\}$.
- Spolu s prozrazeným číslem 22 je součet celé sedmice alespoň $72 + 6 + 22 = 100$. Tři velká čísla tedy musejí být přesně 23, 24, 25 a tři malá čísla musejí být přesně 1, 2, 3 (jinak by součet celé sedmice byl větší než 100). Jediná možná sedmice je tedy v tomto případě sedmice $\{1, 2, 3, 22, 23, 24, 25\}$.

4. *Máme najednou převézt několik beden z místa A na místo B. O bednách víme jen to, že všechny dohromady váží* 270 kg *a že každá z nich váží nejvýše* 7 kg. *Různé bedny mohou být různě těžké a jejich hmotnosti nemusí být celá čísla. Máme k dispozici vozíky s nosností* 30 kg. *Každou bednu musíme naložit na nějaký vozík a celkem chceme vozíků použít co nejméně.*

a) Dokažte, že pro některé sady beden nám 10 *vozíků nebude stačit.*

b) Dokažte, že 12 *vozíků k převozu jistě stačí.*

c) Rozhodněte, zda k převozu jistě stačí 11 *vozíků.*

Řešení. Tři části vyřešíme zvlášť.

a) V principu je na 10 vozících místo až na $10 \cdot 30 = 300$ kg nákladu, což je o dost více než celková hmotnost všech beden. Snažíme se tedy přijít na takovou sadu beden, pro kterou při libovolném nakládání zbyde na vozících nutně hodně nevyužitého místa.

Představme si sadu beden, která mimo jiné obsahuje 41 „těžkých“ beden o hmotnosti 6,01 kg (zbývající hmotnost $270 - 41 \cdot 6{,}01 = 23{,}59$ kg může být do beden rozdělena jakkoliv, například jako 10 beden, každá o hmotnosti 2,359 kg). Pak se na každý vozík vejdou nejvýše 4 těžké bedny (protože $5 \cdot 6{,}01 > 30$), takže na 10 vozících přepravíme nejvýše 40 těžkých beden. Alespoň jednu těžkou bednu proto přepravit nezvládneme, takže 10 vozíků skutečně stačit nemusí.

Poznámka. Podobně lze argumentovat pro sady beden, které zahrnují alespoň 51 beden o homotnosti alespoň $5 + \varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$ je dostatečně malé.

b) Nejdřív popíšeme postup, jak libovolnou sadu beden naložit na 12 vozíků. Bedny budeme postupně nakládat na první vozík, dokud se tam vejdou. Jakmile by přidání další bedny přesáhlo nosnost vozíku, celý vozík prohlásíme za hotový a budeme podobně pokračovat v nakládání na další vozík (jako první tam tedy umístíme bednu, která se na první vozík nevešla).

Teď musíme zdůvodnit, že takto popsaný postup skutečně funguje, tedy že jeho vykonáním naložíme celý náklad dřív než prohlásíme za hotový dvanáctý vozík. Uvědomme si, že na první vozík takto jistě naložíme více než $30 - 7 = 23$ kg nákladu – pokud jsme na něj dosud naložili nejvýše 23 kg, jistě se na něj vejde ještě alespoň jedna další bedna. Podobně naložíme alespoň 23 kg na každý další vozík, než jsme donuceni ho prohlásit za hotový. Celkem tak na 12 vozíků naložíme alespoň $12 \cdot 23 = 276$ kg nákladu, než ten poslední prohlásíme za hotový. Jelikož 276 kg je více než 270 kg, bude 12 vozíků vždy stačit.

c) Ukážeme, že stačí dokonce i 11 vozíků. Tentokrát budeme bedny na vozíky nakládat důvtipněji.

Podobně jako v části b) budeme bedny postupně nakládat na první vozík, dokud se tam vejdou. Jakmile by přidání další bedny přesáhlo nosnost vozíku, bednu si odložíme stranou vedle vozíku (trik!) a budeme pokračovat v nakládání dalšího vozíku dalšími bednami. Takto naložíme prvních 8 z 11 vozíků a dáme si přestávku. Shrňme si, jak na tom jsme:

- Zatím jsme naložili 8 vozíků, takže $11 - 8 = 3$ vozíky jsou zatím prázdné.
- U každého z 8 vozíků máme jednu „odloženou“ bednu, kterou stále musíme někam naložit.

- Kromě toho máme ještě další „zbývající“ bedny, kterých jsme se zatím nedotkli.

Uvědomme si, že 8 odložených beden jistě můžeme naložit na dva ze zbývajících tří vozíků – každá z nich má totiž hmotnost nejvýše 7 kg, takže na devátý vozík můžeme dát první čtyři z nich ($4 \cdot 7 = 28 < 30$) a na desátý vozík zbylé čtyři.

Zbývá ukázat, že všechny zbývající bedny se vejdou na poslední, jedenáctý vozík. Jakou celkovou hmotnost mají všechny zbývající bedny? Ke každému z prvních osmi vozíků jsme přiřadili bedny o hmotnosti větší než 30 kg – všechny bedny až na jednu jsme na něj totiž naložili a ta poslední se na něj už nevešla, takže spolu s těmi naloženými musela vážit více než 30 kg. Zbývající bedny tak mají celkovou hmotnost nejvýše $270 - 8 \cdot 30 = 30$ kg. Vejdou se tedy na jedenáctý vozík.