

II. kolo kategorie Z8

Z8–II–1

Kouzelníkův provázek je delší než 10 m a je možné jej rozdělit v poměrech 3 : 5, 7 : 11 a 13 : 17 tak, že délky všech částí u těchto dělení jsou v celých centimetrech.

Jaká je nejmenší možná délka kouzelníkova provázku? (V. Dedek)

Možné řešení. Součet dílů uvedených dělení je 8, 18 a 30. Délka provázku v centimetrech je násobkem těchto čísel.

Nejmenší společný násobek čísel 8, 18 a 30 je 360. Další násobky 360 jsou 720, 1080 atd. Nejmenší možná délka provázku je 1080 cm.

Poznámka. Místo nejmenšího společného násobku daných čísel lze postupně hledat násobky 30 větší než 1000 (1020, 1050, 1080, ...) a ověřovat jejich dělitelnost 8 a 18. Nejmenší je 1080.

Hodnocení. 2 body za možnou délku provázku jako násobek čísel 8, 18 a 30; 2 body za nejmenší společný násobek těchto čísel či analogický postup; 2 body za výsledek.

Z8–II–2

Monika si vybrala dvě čísla a s nimi zkoušela robota Popletu. Nejprve mu dala sečíst první a druhé číslo, ale Popletův výsledek byl o 4,1 menší než správný. Pak mu dala sečíst trojnásobek prvního čísla a druhé číslo, ale Popletův výsledek byl o 8,4 menší než správný. Záhy zjistila, že Popleta pro dvě čísla, která dostane, nepočítá součet, ale aritmetický průměr.

Která čísla si Monika vybrala? (K. Pazourek)

Možné řešení. Rozdíl mezi součtem dvou čísel a jejich aritmetickým průměrem je roven právě tomuto průměru. Pokud označíme první Moničino číslo a a druhé b , potom podle zadání platí

$$\frac{a+b}{2} = 4,1, \quad \frac{3a+b}{2} = 8,4$$

neboli

$$a+b = 8,2, \quad 3a+b = 16,8.$$

Poslední dvě vyjádření se liší o dvojnásobek prvního čísla, tedy $2a = 8,6$. Odtud plyne $a = 4,3$, což po dosazení do kterékoli z předchozích rovnic dává $b = 3,9$. Monika si vybrala čísla 4,3 a 3,9.

Hodnocení. 2 body za vyjádření pomocí neznámých; 2 body za úpravy; 2 body za výsledek.

Z8–II–3

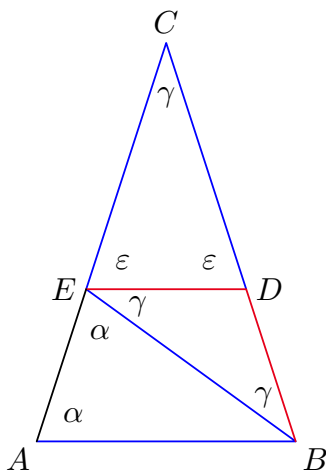
V trojúhelníku ABC leží bod D na straně BC , bod E na straně AC a platí

$$|AB| = |BE| = |EC| = |CD|, \quad |BD| = |DE|.$$

Určete velikosti úhlů ACB a BAD .

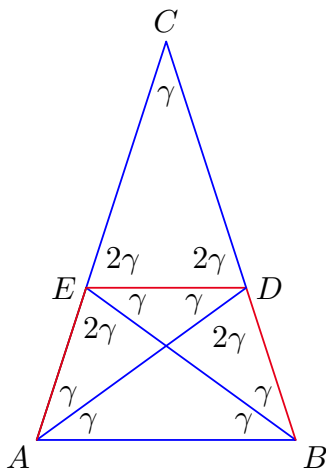
(P. Bak)

Možné řešení. Díky shodnosti úseček je v útvaru několik rovnoramenných trojúhelníků. V každém rovnoramenném trojúhelníku jsou vnitřní úhly u základny shodné. V následujícím obrázku jsou shodné úsečky zvýrazněny stejnými barvami a shodné úhly označeny stejnými symboly:



Úhel EDC je vnějším úhlem trojúhelníku EDB , a ten je roven součtu nepřiléhajících vnitřních úhlů, tzn. $\varepsilon = 2\gamma$. Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku EDC je 180° , tzn. $2\varepsilon + \gamma = 180^\circ$. Dohromady dostáváme $5\gamma = 180^\circ$, tedy $\gamma = 36^\circ$. Velikost úhlu ACB je 36° .

Úhel CEA je přímý a jeho velikost je vyjádřena jako $\varepsilon + \gamma + \alpha$. Z předchozího víme, že $180^\circ = 5\gamma$ a $\varepsilon = 2\gamma$, tedy $\alpha = 2\gamma$. Zejména úhly CED a CAB jsou shodné, tedy úsečky ED a AB jsou rovnoběžné. To znamená, že trojúhelník ABC je rovnoramenný se základnou AB . Ze souměrnosti tohoto trojúhelníku plyne, že také úhly BAD a ABE jsou shodné a mají velikost $\alpha - \gamma = \gamma = 36^\circ$. Velikost úhlu BAD je 36° .



Hodnocení. 1 bod za úvodní rozbor a rozpoznání shodných úhlů; 1 bod za velikost úhlu ACB ; 2 body za zdůvodnění rovnoramennosti trojúhelníku ABC ; 1 bod za velikost úhlu BAD ; 1 bod za kvalitu komentáře.