

II. kolo kategorie Z7

Z7–II–1

Maminka si nachystala perníčky ke zdobení. Každý perníček zdobí stejně dlouho. Kdyby při zdobení každého perníčku byla o minutu rychlejší, pak by mohla skončit o 48 minut dříve, nebo by v takto ušetřeném čase mohla ozdobit (v novém zrychleném tempu) přesně 12 dalších perníčků.

Kolik perníčků si maminka nachystala a jak dlouho jí bude trvat jejich zdobení (v obvyklém nezrychleném tempu)? (M. Petrová)

Možné řešení. O minutu rychlejší zdobení každého perníčku by vedlo k celkové úspoře 48 minut. Maminka si ke zdobení nachystala 48 perníčků.

Ve zrychleném tempu by za 48 minut nazdobila 12 perníčků, tedy jeden perníček za $48/12 = 4$ minuty. V obvyklém tempu jí jeden perníček zabere $4 + 1 = 5$ minut. Zdobení 48 perníčků bude mamince trvat $48 \cdot 5 = 240$ minut.

Hodnocení. 2 body za počet perníčků; 2 body za časy zdobení jednoho perníčku; 2 body za celkový čas zdobení.

Z7–II–2

V útulku je 60 zvířat, a to výhradně kočky a psi. Třetina koček a tři osminy psů nejsou ani rok staří, 39 zvířat má rok nebo více.

Kolik je v útulku koček a kolik psů? (L. Dedková)

Možné řešení. V útulku je 60 zvířat, počet koček je dělitelný třemi, počet psů je dělitelný osmi, dvě třetiny koček a pět osmin psů má rok nebo více. Pro násobky osmi nepřevyšující 60 vyjádříme rozdíl od 60, ověříme dělitelnost třemi a v kladném případě určíme počet zvířat starých rok nebo více:

p	8	16	24	32	40	48	56
$k = 60 - p$	52	44	36	28	20	12	4
k děl. 3	ne	ne	ano	ne	ne	ano	ne
$\frac{2}{3}k + \frac{5}{8}p$			39			38	

39 zvířat starých rok nebo více vychází pro hodnoty ve třetím sloupci tabulky. V útulku je 36 koček a 24 psů.

Poznámky. Počty koček a psů můžeme vyjádřit jako $k = 3l$ a $p = 8q$, kde l a q jsou přirozená čísla. Podmínky ze zadání lze vyjádřit pomocí rovnic:

$$3l + 8q = 60, \quad 2l + 5q = 39. \quad (*)$$

Podobným způsobem jako výše lze určit řešení každé rovnice. Pro $q = 1, 2, 3, \dots$ vyjádříme rozdíl $60 - 8q$, resp. $39 - 5q$, ověříme dělitelnost třemi, resp. dvěma a v kladném případě určíme l :

$$l = \frac{60 - 8q}{3}, \quad \text{resp.} \quad l = \frac{39 - 5q}{2}. \quad (**)$$

Jediná dvojice vyhovující oběma podmínkám je $q = 3$ a $l = 12$. To odpovídá $p = 24$ a $k = 36$.

K témuž výsledku lze dospět řešením soustavy rovnic (*). Z dvojího vyjádření (**) neznámé l dostáváme:

$$\begin{aligned} \frac{60 - 8q}{3} &= \frac{39 - 5q}{2}, \\ 120 - 16q &= 117 - 15q, \\ 3 &= q. \end{aligned}$$

Dosazení $q = 3$ do (**) dává $l = 12$.

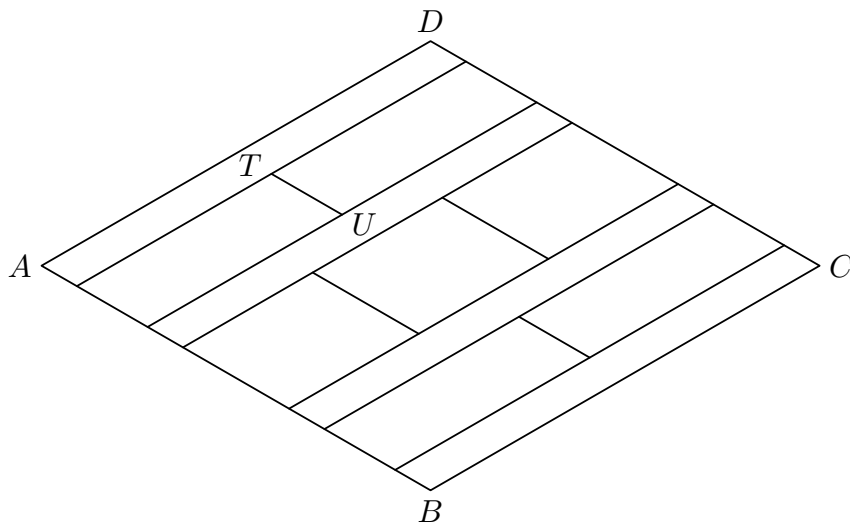
Hodnocení. 2 body za postřehy s dělitelností třemi a osmi, příp. formulaci pomocí rovnic; 2 body za důsledné zkoušení možností, příp. řešení rovnic; 2 body za výsledek.

Z7–II–3

Kosočtverec $ABCD$ je složen z rovnoběžníků s navzájem stejnými obsahy. Vyznačená společná strana TU dvou rovnoběžníků měří 2 cm.

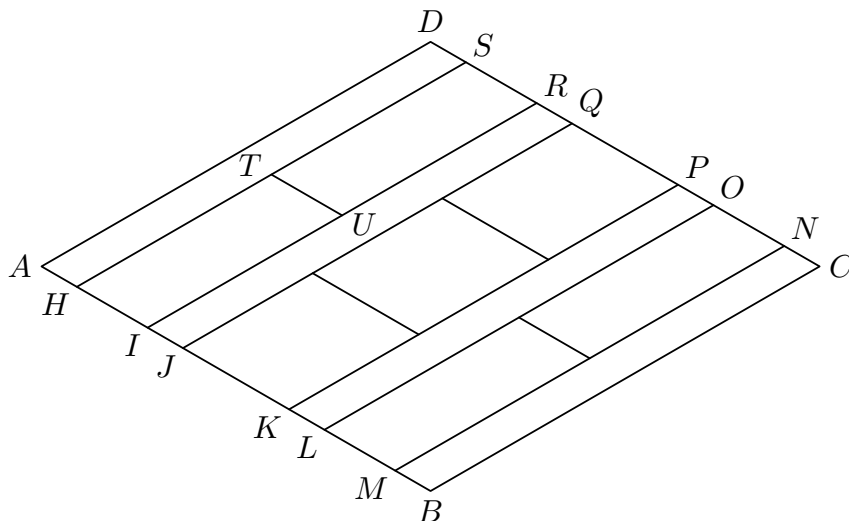
Určete obvod kosočtverce $ABCD$.

(K. Pazourek)



Poznámka: obrázek je pouze ilustrační.

Možné řešení. Všechny rovnoběžníky mají navzájem shodné vnitřní úhly. Porovnávání obsahů proto vede k porovnávání jejich stran. Kvůli snadnějšímu vyjadřování si vrcholy rovnoběžníků označíme:



Rovnoběžník $HIRS$ je rozdělen na dva rovnoploché, a proto shodné rovnoběžníky. Každý z nich má stejný obsah jako rovnoběžník $AHSD$, s nímž má rovnoběžník $HIRS$ společnou stranu. Proto je obsah $HIRS$ dvojnásobný vzhledem k obsahu $AHSD$ a platí $|HI| = |TU| = 2|AH|$ neboli

$$|AH| = \frac{1}{2}|TU| = 1 \text{ cm.}$$

Rovnoběžníky $AHSD$, $IJQR$, $KLOP$ a $MBCN$ mají stejné obsahy a shodné jedny strany. Proto jsou rovnoběžníky shodné navzájem a platí

$$|AH| = |IJ| = |KL| = |MB| = 1 \text{ cm.}$$

Rovnoběžník $JKPQ$ je rozdělen na tři rovnoploché, a proto shodné rovnoběžníky. Každý z nich má stejný obsah jako rovnoběžník $IJQR$, s nímž má rovnoběžník $JKPQ$ společnou stranu. Proto je obsah $JKPQ$ trojnásobný vzhledem k obsahu $IJQR$ a platí

$$|JK| = 3|IJ| = 3 \text{ cm.}$$

Obdobná úvaha jako v prvním odstavci pod obrázkem dává

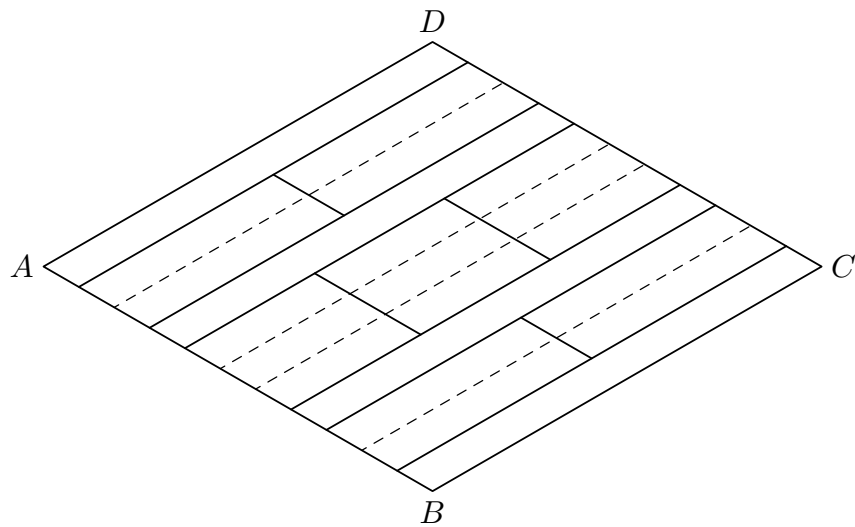
$$|LM| = |HI| = 2 \text{ cm.}$$

Délka strany kosočtverce je

$$|AB| = 4|AH| + 2|HI| + |JK| = 11 \text{ cm.}$$

Obvod kosočtverce je čtyřnásobkem délky strany, tj. 44 cm.

Poznámka. Znázornění poměrů mezi stranami dílčích rovnoběžníků může vypadat takto (nejmenší úsečky na stranách AB , resp. CD jsou navzájem shodné):



Hodnocení. Po 1 bodu za každý z mezivýsledků zobrazených odsazeně a vystředěně; 1 bod za obvod kosočtverce.