

II. kolo kategorie Z6

Z6–II–1

Neznámé přirozené číslo je větší než 7000 a součin jeho číslic je 252.

Najděte dvě nejmenší čísla s těmito vlastnostmi.

(I. Jančígová)

Možné řešení. Jednomístní dělitelé čísla 252 jsou 1, 2, 3, 4, 6, 7 a 9. Pomocí těchto číslic má být vyjádřeno hledané číslo.

Nejmenší čísla větší než 7000 jsou tvaru 71**, kde také číslice na místech hvězdiček jsou někteří z výše uvedených dělitelů. Přitom $252 : 7 = 36$, tedy součin těchto číslic musí být 36. Číslice na místech hvězdiček jsou buď 4 a 9, nebo 6 a 6.

Nejmenší čísla s uvedenými vlastnostmi jsou 7149 a 7166.

Hodnocení. 2 body za jednomístné dělitele čísla 252; 2 body za rozbor možností, příp. úplnost zkoušení; po 1 bodu za každé z hledaných čísel.

Při opomenutí dělitele 1 vychází nejmenší dvě čísla 7229 a 7236. Takové řešení hodnotíte nejvýše 3 body podle kvality komentáře.

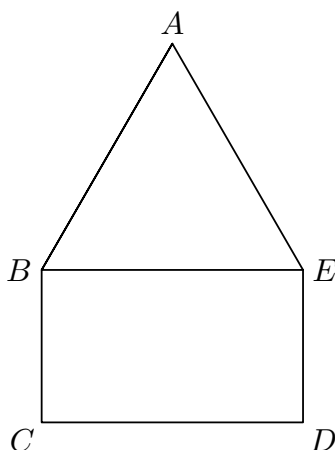
Z6–II–2

Cestičky mezi úkryty cvrčků Adama, Broňka, Cyrila, Daniela a Erika tvoří síť jako na obrázku (kde úkryty jsou označeny prvními písmeny jmen cvrčků) a platí:

- Cestičky mezi úkryty Adama, Broňka a Erika tvoří rovnostranný trojúhelník.
- Cestičky mezi úkryty Broňka, Cyrila, Daniela a Erika tvoří obdélník s obsahem 360 dm^2 .
- Délka procházky po cestičkách od Adama k Broňkovi, Cyrilovi, Danielovi, Erikovi a Adamovi je o 24 dm delší než délka procházky od Adama k Broňkovi, Erikovi a Adamovi.

Jak dlouhá je cestička mezi úkryty Adama a Erika?

(E. Novotná)



Poznámka: obrázek je pouze ilustrační.

Možné řešení. Čtyřúhelník $BCDE$ je obdélník, tedy jeho protější strany jsou shodné, $|BE| = |CD|$ a $|BC| = |DE|$. Rozdíl délek dvou popsanych procházek odpovídá dvojnásobku strany BC :

$$(|AB| + |BC| + |CD| + |DE| + |EA|) - (|AB| + |BE| + |EA|) = |BC| + |DE| = 2|BC|.$$

To je podle zadání 24 dm, tedy $|BC| = 12$ dm.

Obsah obdélníku $BCDE$ je $|BC| \cdot |BE| = 360 \text{ dm}^2$. Tedy $|BE| = 360/12 = 30$ (dm).

Trojúhelník ABE je rovnostranný, tedy $|AE| = |BE|$. Cestička mezi úkryty Adama a Erika je dlouhá 30 dm.

Hodnocení. 2 body za velikost strany BC či DE ; 2 body za velikost druhé strany obdélníku; 1 bod za velikost strany AE ; 1 bod za kvalitu komentáře.

Z6–II–3

Jakub přečetl knihu během tří dnů: v úterý přečetl třetinu všech stran, ve středu přečetl tři sedminy zbylých stran a posledních 32 stran přečetl ve čtvrtek.

Kolik stran měla kniha? (E. Novotná)

Možné řešení. V úterý Jakub přečetl $\frac{1}{3}$ všech stran. Zbývalo mu $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ všech stran.

Ve středu přečetl $\frac{3}{7}$ zbývajících stran, tj. $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{7}$ všech stran. Zbývalo mu $\frac{2}{3} - \frac{2}{7} = \frac{8}{21}$ všech stran.

Ve čtvrtek přečetl všechny zbývajících strany, a těch bylo 32. Kniha měla $\frac{21}{8} \cdot 32 = 84$ stran.

Jiné řešení. 32 stran, které Jakub přečetl ve čtvrtek, je počet stran, které mu zbyly ze středy. To odpovídá $1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$ stran, které měl ke čtení ve středu. Ve středu měl ke čtení $\frac{7}{4} \cdot 32 = 56$ stran.

56 stran, které měl Jakub ke čtení ve středu, je počet stran, které mu zbyly z úterý. To odpovídá $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ stran, které měl ke čtení v úterý. V úterý začal knihu číst, kniha měla $\frac{3}{2} \cdot 56 = 84$ stran.

Poznámka. Počet stran přečtených v úterý, resp. ve středu je vyjádřen pomocí třetin, resp. sedmin a obdobně je vyjádřen počet zbylých stran v jednotlivých dnech. Na čtvrtek připadlo 32 stran. Nejmenší číslo, které je násobkem tří a sedmi, je 21. Pro násobky 21 větší než 32 lze postupně doplňovat, kolik stran Jakub přečetl, kolik stran zbylo, a ověřit, zda na čtvrtek vychází 32 stran. Pro knihu o 42, resp. 63 stranách, na čtvrtek vychází 16, resp. 24 stran, což je málo. Pro knihu o 84 stranách, na čtvrtek vychází 32 stran:

	ke čtení	přečetl	zbylo
úterý	84	28	56
středa	56	24	32
čtvrtek	32	32	0

Hodnocení. 4 body za dílčí úpravy, mezivýsledky, příp. úplnost zkoušení (úpravy zlomků, přečtené/zbylé strany v jednotlivých dnech, zkoušení násobků 21); 2 body za výsledek. Výše uvedená tabulka bez dalšího komentáře má hodnotu 3 bodů.