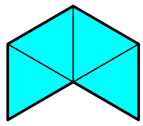
74. ročník Matematické olympiády (2024/2025)

Úlohy krajského kola kategorie B

1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 2z + 1 = 0,$$
$$y^2 - xy - 2y + 2x = 0.$$

2. Určete všechna přirozená čísla n s následující vlastností: Pravidelný šestiúhelník se stranou délky n lze rozřezat na útvary jako na obrázku složené ze čtyř rovnostranných trojúhelníků se stranou délky 1.



3. Nechť I je středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Obraz kružnice k opsané trojúhelníku BIC v osové souměrnosti podle přímky BC protne úsečky AB a AC po řadě v bodech $D \neq B$ a $E \neq C$. Předpokládejme, že se úsečky BE a CD protínají na kružnici k. Určete všechny možné velikosti úhlu BAC.

4. Najděte všechna přirozená čísla n taková, že čísla

$$\frac{1}{n} \qquad \text{a} \qquad \frac{1}{n+23^2}$$

mají nekonečné desetinné rozvoje, které se shodují od některého místa stejného pro obě čísla.

Krajské kolo kategorie B se koná

v úterý 1. dubna 2025

tak, aby začalo nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času; případné dotazy k textu zadání mohou být zodpovězeny v prvních 20 minutách. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Bodová hranice k určení úspěšných řešitelů bude stanovena centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. *V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic*

$$x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 2z + 1 = 0,$$
$$y^2 - xy - 2y + 2x = 0.$$

(Mária Dományová)

Řešení. Druhou rovnici upravíme na tvar $y(y - x) - 2(y - x) = 0$ a vytknutím společných činitelů dostaneme $(y - x)(y - 2) = 0$. Proto $y = x$ nebo $y = 2$.

Pokud $y = x$, pak dosazením do první rovnice obdržíme po úpravách

$$\begin{aligned} x^2 + 4x^2 + z^2 - 4x^2 - 2z + 1 &= 0,\\ x^2 + z^2 - 2z + 1 &= 0,\\ x^2 + (z - 1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Součet druhých mocnin reálných čísel na levé straně poslední rovnice je nulový, právě když $x = 0$ a $z = 1$. Získáme tak řešení $(x, y, z) = (0, 0, 1)$.

Pokud $y = 2$, pak obdobně dostáváme

$$\begin{aligned} x^2 + 16 + z^2 - 8x - 2z + 1 &= 0,\\ x^2 - 8x + 16 + z^2 - 2z + 1 &= 0,\\ (x - 4)^2 + (z - 1)^2 &= 0, \end{aligned}$$

což platí, právě když $x = 4$ a $z = 1$. Tím získáme další řešení $(x, y, z) = (4, 2, 1)$.

Závěr. Daná soustava rovnic má v oboru reálných čísel dvě řešení $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ a $(x, y, z) = (4, 2, 1)$. Zkouškou snadno ověříme, že obě vyhovují.

Jiné řešení. Soustavu ekvivalentně upravíme na

$$(x - 2y)^2 + (z - 1)^2 = 0,$$
$$(y - x)(y - 2) = 0.$$

První rovnost platí, právě když $x = 2y$ a $z = 1$. Druhá rovnost platí, právě když $y = x$ nebo $y = 2$. Diskusí obou případů obdržíme dvě řešení $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ a $(x, y, z) = (4, 2, 1)$.

Jiné řešení. Z druhé rovnice vyjádříme x (řešíme lineární rovnici s neznámou x a parametrem y)

$$\begin{aligned} y^2 - xy - 2y + 2x &= 0,\\ y(y - 2) &= x(y - 2), \end{aligned}$$

z čehož za předpokladu $y \neq 2$ dostaneme $x = y$. Pro $y = 2$ tak máme $0 = 0$, což splňuje libovolné reálné x. Proto druhá rovnice platí právě pro $x = y$ nebo $y = 2$.*

* K témuž závěru lze dojít i vyřešením druhé rovnice soustavy jako kvadratické rovnice s neznámou y a parametrem x.

Pokud $y = x$, pak první rovnici řešíme jako kvadratickou s neznámou x:

$$\begin{aligned} x^2 + 4x^2 + z^2 - 4x^2 - 2z + 1 &= 0, \\ x^2 &= -z^2 + 2z - 1, \\ x^2 &= -(z-1)^2. \end{aligned}$$

Levá strana poslední rovnice je nezáporná. Má tak řešení, je-li výraz $-(z-1)^2$ nezáporný. To nastane pouze pro $z = 1$, kdy dostaneme $x^2 = 0$, tedy $x = 0$. Získáme tak řešení $(x, y, z) = (0, 0, 1)$.

Pokud $y = 2$, dosadíme do první rovnice a řešíme ji jako kvadratickou s neznámou x

$$\begin{aligned} x^2 + 16 + z^2 - 8x - 2z + 1 &= 0, \\ x^2 - 8x + z^2 - 2z + 17 &= 0. \end{aligned}$$

Její diskriminant

$$64 - 4(z^2 - 2z + 17) = -4z^2 + 8z - 4 = -4(z-1)^2$$

je nezáporný pouze v případě $z = 1$ a pro tuto hodnotu existuje jediný kořen $x = 4$. Tak získáme druhé řešení $(x, y, z) = (4, 2, 1)$. Zkouškou správnosti snadno ověříme, že obě řešení vyhovují.

Poznámka. Řešení lze zformulovat i jako řetězec ekvivalencí, čímž se lze vyhnout nutnosti provést na konci zkoušku správnosti. Vzhledem k délce řešení je jednodušší provést zkoušku než pečlivě kontrolovat každou úvahu.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních ohodnoťte kroky z výše popsaných postupů následovně:

A1. Důkaz, že z druhé rovnice vyplývá „$x = y$ nebo $y = 2$“: 2 body

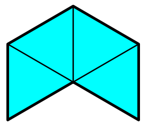
A2. Důkaz, že z první rovnice vyplývá „$x = 2y$ a $z = 1$“: 3 body

A3. Vyřešení první rovnice v jednom z případů $x = y$, $y = 2$: 2 body

A4. Uvedení obou řešení spolu se zdůvodněním, že obě vyhovují (ať zkouškou či použitím ekvivalentních úprav): 1 bod

Celkově pak za neúplná řešení udělte A1 + max(A2, A3) + A4 bodů. Bod za chybějící zkoušku správnosti strhněte jen v případě, pokud řešitel používá neekvivalentní úpravy rovnic nebo pokud některá z jeho úvah ve tvaru implikace nelze nahradit ekvivalencí.

2. *Určete všechna přirozená čísla n s následující vlastností: Pravidelný šestiúhelník se stranou délky n lze rozřezat na útvary jako na obrázku složené ze čtyř rovnostranných trojúhelníků se stranou délky* 1.

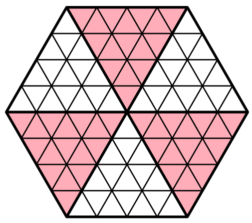


(Anastasia Bredichina)

Řešení. Pravidelný šestiúhelník se stranou n lze rozdělit na 6 rovnostranných trojúhelníků (jako na obrázku 1 pro $n = 4$) se stranou délky n. Každý z těchto velkých trojúhelníků obsahuje

$$(2n-1)+(2n-3)+\cdots+5+3+1=n^2$$

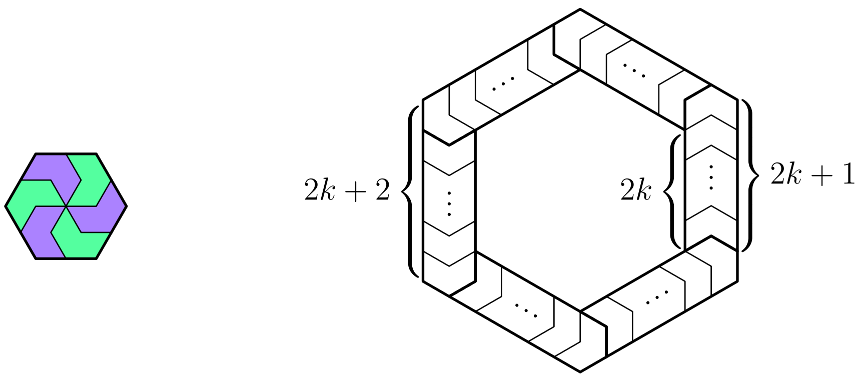
rovnostranných trojúhelníků se stranou délky 1 (podle vztahu odvozeného v návodné úloze N3 ke 3. úloze domácího kola). Šestiúhelník se tak skládá z $6n^2$ rovnostranných trojúhelníků se stranou délky 1.* Aby se dal pokrýt útvary ze zadání, musí platit $4 \mid 6n^2$, proto n je nutně sudé.



Obr. 1

Pro sudé n, tedy $n = 2k$ pro nějaké celé číslo k, dokážeme matematickou indukcí, že šestiúhelník lze rozřezat podle zadání. Rozřezání v případě $k = 1$ (tedy $n = 2$) vidíte na obrázku 2 vlevo. Předpokládejme, že pro nějaké celé číslo k lze rozřezat šestiúhelník se stranou délky $2k$. Šestiúhelník se stranou délky $2k + 2$ dělíme následovně. Nejprve vyřízneme jako na obrázku 2 vpravo střední šestiúhelník se stranou délky $2k$, který rozřežeme podle indukčního předpokladu. Zbylý okraj rozdělíme na šest nekonvexních šestiúhelníků se stranami délek 1 a $2k + 1$. Každý z nich lze rozřezat na $2k + 1$ zadaných útvarů. Takto jsme dostali hledané rozřezání šestiúhelníku se stranou $2k + 2$, čímž je dle principu matematické indukce důkaz ukončen.

Závěr. Zadání vyhovují všechna sudá čísla n a žádná jiná.

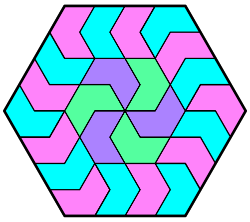


Obr. 2

* Týž výsledek můžeme získat, pokud si uvědomíme, že šestiúhelník lze rovněž rozdělit na tři kosočtverce se stranou délky n, každý z nich se skládá z n řad po $2n$ trojúhelnících se stranou délky 1.

Poznámka. V první části řešení můžeme vyloučit lichá čísla n i na základě obsahů vypočítaných běžnými vztahy. Obsah rovnostranného trojúhelníku se stranou a je $\frac{1}{4}\sqrt{3}\cdot a^2$. Proto obsah útvaru je $\sqrt{3}$ a obsah šestiúhelníku je $6 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot n^2$. Jejich podíl $\frac{3}{2}n^2$ musí být celé číslo.

Rozřezání pro $n = 4$ získané uvedeným postupem je na obrázku 3.



Obr. 3

Lze ukázat, že popsaný způsob řezání je v zásadě jediný. Existují tři způsoby odříznutí dílku v rohu šestiúhelníku. Jeden z nich vede ke sporu a zbylé dva vedou k postupnému odříznutí dílků podél obvodu šestiúhelníku buď ve směru, nebo proti směru hodinových ručiček, čímž ve středu zůstane šestiúhelník se stranou o 2 kratší. Všech možných rozřezání šestiúhelníku se stranou $2k$ je proto 2^k.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních ohodnoťte kroky z výše popsaného postupu následovně:

A1. Důkaz, že celý šestiúhelník se skládá ze $6n^2$ jednotkových trojúhelníků, resp. analogické vyjádření obsahu šestiúhelníku: 1 bod

A2. Důkaz, že pro liché n nelze šestiúhelník rozřezat: 2 body

B1. Příklad rozdělení šestiúhelníku se stranou $n = 2$: 1 bod

B2. Příklad rozdělení šestiúhelníku se stranou konkrétní délky $n \geqq 4$: 2 body

B3. Důkaz, že pro každé sudé n lze šestiúhelník rozřezat podle zadání: 4 body

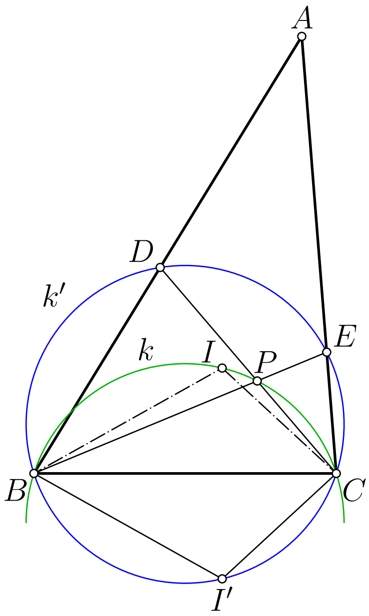
Celkově pak za neúplná řešení udělte $\max(\mathrm{A1}, \mathrm{A2}) + \max(\mathrm{B1}, \mathrm{B2}, \mathrm{B3})$ bodů.

V důkazu B3 nestačí uvést příklady pro několik konkrétních n, je třeba i obecný popis. Není nutné zmiňovat matematickou indukci, stačí neformální popis iterace/rekurze.

3. *Nechť I je středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Obraz kružnice k opsané trojúhelníku BIC v osové souměrnosti podle přímky BC protne úsečky AB a AC po řadě v bodech $D \neq B$ a $E \neq C$. Předpokládejme, že se úsečky BE a CD protínají na kružnici k. Určete všechny možné velikosti úhlu BAC.*

(Anastasia Bredichina, Patrik Bak)

Řešení. Nechť P je průsečík úseček BE a CD. Podle věty o obvodovém úhlu leží bod P na kružnici k, právě když platí $|\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle BIC|$. Velikosti obou úhlů vyjádříme pomocí velikostí úhlů trojúhelníku ABC (označených standardním způsobem).



Obr. 1

Pro velikosti úhlů v trojúhelníku BIC platí

$$|\sphericalangle BIC| = 180° - |\sphericalangle CBI| - |\sphericalangle ICB| = 180° - \tfrac{1}{2}\beta - \tfrac{1}{2}\gamma = 90° + \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Obraz kružnice k v osové souměrnosti podle přímky BC označíme k' a obraz bodu I označíme I'. Z osové souměrnosti platí $|\sphericalangle BIC| = |\sphericalangle BI'C|$. Podle zadání na kružnici k' leží i body D, E, ale leží v opačné polorovině určené přímkou BC jako bod I'. Z věty o obvodovém úhlu získáme

$$|\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle BEC| = 180° - |\sphericalangle BI'C| = 180° - |\sphericalangle BIC| = 90° - \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Pro vedlejší úhly platí $|\sphericalangle PDA| = 180° - |\sphericalangle BDC| = 90° + \frac{1}{2}\alpha$ a analogicky $|\sphericalangle PEA| = 90° + \frac{1}{2}\alpha$. Ze shodnosti vrcholových úhlů získáme $|\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle EPD|$. Velikost úhlu EPD určíme ze čtyřúhelníku $ADPE$

$$\begin{aligned}|\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle EPD| &= 360° - (|\sphericalangle DAE| + |\sphericalangle AEP| + |\sphericalangle ADP|) = \\ &= 360° - (\alpha + 90° + \tfrac{1}{2}\alpha + 90° + \tfrac{1}{2}\alpha) = 180° - 2\alpha.\end{aligned}$$

Jelikož body P a I leží ve stejné polorovině určené přímkou BC, bod P leží na kružnici k, právě když $|\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle BIC|$, neboli

$$\begin{aligned} |\sphericalangle BPC| = 180° - 2\alpha = 90° + \tfrac{1}{2}\alpha &= |\sphericalangle BIC|, \\ \tfrac{5}{2}\alpha &= 90°, \\ \alpha &= 36°. \end{aligned}$$

Jediná možná velikost úhlu BAC je tak 36°.

Poznámka. Vztah $|\sphericalangle BDC| = 90° - \frac{1}{2}\alpha$ lze odvodit i následovně: Úhly BIC a BDC jsou obvodovými úhly shodných kružnic (k a k') nad společnou tětivou BC, přičemž úhel BIC je tupý a přísluší tak kratšímu oblouku a úhel BDC přísluší z osové symetrie tomu delšímu. Proto $|\sphericalangle BDC| = 180° - |\sphericalangle BIC|$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních ohodnoťte kroky z výše popsaného postupu následovně:

A1. Uvedení vztahu $|\sphericalangle BIC| = 90° + \frac{1}{2}\alpha$ (absenci jeho odvození tolerujte): 1 bod
A2. Odvození vztahu $|\sphericalangle BDC| = 180° - |\sphericalangle BIC|$: 1 bod
A3. Odvození vztahu $|\sphericalangle BIC| = |\sphericalangle BPC|$: 1 bod
A4. Sestavení rovnice, ze které lze určit $|\sphericalangle BAC|$: 2 body
A5. Uvedení správného výsledku (i když je jen uhodnutý): 1 bod

Celkově pak za neúplná řešení udělte A1 + A2 + A3 + A4 + A5 bodů. Body za A1, A2 a A3 udělte i v případě, kdy nejsou v řešení explicitně zmíněny, ale přímo vyplývají z vyjádření velikostí úhlů, resp. když je v řešení odvozen ekvivalentní vztah.

Tolerujte, pokud v řešení není ověřeno, že hodnota $\alpha = 36°$ je dosažitelná, tedy že pro ni existuje trojúhelník vyhovující zadání. (V řešení jsme to ukázali pečlivou formulací všech úvah pomocí ekvivalencí.)

4. *Najděte všechna přirozená čísla n taková, že čísla*

$$\frac{1}{n} \qquad a \qquad \frac{1}{n+23^2}$$

mají nekonečné desetinné rozvoje, které se shodují od některého místa stejného pro obě čísla. (Ján Mazák, Josef Tkadlec)

ŘEŠENÍ. Pro začátek si uvědomme, že zlomek má nekonečný desetinný rozvoj, právě když jmenovatel jeho vyjádření v základním tvaru je dělitelný prvočíslem různým od 2 a 5.* Zápisy čísel $1/n$ a $1/(n+23^2)$ se od nějakého místa shodují, proto jejich rozdíl

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+23^2} = \frac{23^2}{n(n+23^2)}$$

má konečný desetinný rozvoj. To nastane, právě když v prvočíselném rozkladu jmenovatele základního tvaru tohoto rozdílu budou jen mocniny prvočísel 2 a 5. Při úpravě na základní tvar se tedy všechna ostatní prvočísla musí zkrátit. Jelikož jmenovatel je dělitelný n, je dělitelný i každým prvočíslem, které dělí n. Víme přitom, že $1/n$ má nekonečný rozvoj, proto nějaké prvočíslo různé od 2 a 5 dělí n. Označme p libovolné z těchto prvočísel. Jelikož p se ve zkoumaném zlomku zkrátí, musí dělit i čitatele, čili 23^2, proto nutně $p = 23$. Zároveň 23^2 už nemůže dělit n: pokud by jej dělilo, pak by se v rozkladu jmenovatele zkoumaného zlomku na prvočísla vyskytovalo 23^4 (jelikož by platilo $23^2 \mid n+23^2$), což by nešlo úplně zkrátit. Proto $n = 23 \cdot 2^a \cdot 5^b$ pro nějaká nezáporná celá čísla a, b.

Po dosazení tohoto rozkladu a krácení dostaneme

$$\frac{23^2}{n(n+23^2)} = \frac{23^2}{23 \cdot 2^a \cdot 5^b(23 \cdot 2^a \cdot 5^b + 23^2)} = \frac{1}{2^a \cdot 5^b(2^a \cdot 5^b + 23)}.$$

Jelikož se jedná o zlomek v základním tvaru, jeho jmenovatel může obsahovat ve svém prvočíselném rozkladu jen prvočísla 2 a 5. Proto pro nějaká nezáporná celá čísla c, d platí

$$2^a \cdot 5^b + 23 = 2^c \cdot 5^d.$$

Jelikož 23 není dělitelné dvěma, jedno z čísel a, c je 0. Z podobné úvahy o dělitelnosti pěti je opět jedno z čísel b, d rovno 0. Případ $c = d = 0$ nemůže nastat, protože levá strana je větší než 1. Rovněž $a = b = 0$ nemůže platit, protože $1 + 23 = 24$, což je dělitelné třemi. Zbývají nám tak dva případy: $a = d = 0$ a $b = c = 0$, přičemž zbývající dvě neznámé jsou kladné.

(i) Nechť $b = c = 0$. Hledáme tedy kladná celá čísla a, d splňující

$$2^a + 23 = 5^d.$$

Pro $a = 1$ dostaneme (jediné) řešení $d = 2$, čemuž odpovídá $n = 23 \cdot 2 = 46$. Pokud $a \geqq 2$, pak levá strana rovnice dává po dělení čtyřmi zbytek 3. Pravá strana dává po

* Důkaz tvrzení o nekonečném rozvoji nevyžadujeme. Dá se udělat například na základě pozorování, že kladné číslo x má konečný desetinný rozvoj právě tehdy, když existují kladná celá čísla a a b taková, že $x \cdot 10^a = b$ (viz také návodnou úlohu N4 k úloze 4 domácího kola).

dělení čtyřmi stejný zbytek jako 1^d, tedy zbytek 1. Jelikož strany rovnice dávají různé zbytky po dělení čtyřmi, tak další řešení v tomto případě neexistuje.

(ii) Nechť $a = d = 0$. Ukážeme, že rovnice

$$5^b + 23 = 2^c$$

nemá v kladných celých číslech řešení. Určíme, které zbytky po dělení 15 můžeme na stranách rovnice dostat. Mocniny 2^c pro $c \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dávají po řadě zbytky 2, 4, 8, 1 a opět 2. Každý další zbytek získáme vynásobením předchozího zbytku dvěma a případným odečtením násobku 15. Opakuje-li se zbytek 2, tak zbytky dalších mocnin se opakují v pořadí 2, 4, 8, 1. Analogicky na levé straně zjistíme, že 5^d má zbytek 5 nebo 10. Tedy zbytek levé strany je 13 nebo 3. Zbytky levé a pravé strany po dělení 15 jsou různé, takže tato rovnice opravdu nemá řešení.

Jediným řešením je tak číslo $n = 46$. Tehdy je rozdíl zlomků ze zadání $1/50 = 0{,}02$, což má konečný desetinný rozvoj.

Poznámka 1. Při důkazu, že rovnice $5^b + 23 = 2^c$ nemá řešení v kladných celých číslech, lze analogicky využít i zbytky po dělení jiným číslem. Kromě čísla 15 vyhovují například i 31, 39, 63, 69 nebo jejich násobky. Pokud využijeme, že $2^c \geqq 5$, tedy $c \geqq 5$, tak pro dokončení řešení vyhovuje i 24.

Úvahu o dělitelnosti 15 lze nahradit úvahami o delitelnosti 5 a 3. Hledané c musí splňovat podmínku $5 \mid 2^c - 23$ a postupným prověřením $c \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ zjistíme, že jediná možnost je $c = 4k + 3$ pro nezáporné celé k (dále se zbytky periodicky opakují). Po dosazení do zkoumané rovnice tak máme $5^b + 23 = 16^k \cdot 8$. Když se na tuto rovnost podíváme z hlediska zbytku po dělení třemi, vidíme, že 16^k dává vždy zbytek 1, proto pravá strana dává zbytek 2. Jenže i 23 dává zbytek 2, proto by 5^b muselo být dělitelné třemi, a to pro žádné b není.

Přesné desetinné zápisy nalezených zlomků jsou $1/46 = 0{,}02\overline{1739130434782608695652}$ a $1/575 = 0{,}00\overline{1739130434782608695652}$ (obě periody mají délku 22).

Poznámka 2. Uvedeme ještě jeden způsob, jak dokázat, že rovnice $5^b + 23 = 2^c$ nemá v kladných celých číslech řešení. Jelikož je levá strana větší než 23, tak $c \geqq 5$. Rovnici upravíme na

$$\begin{aligned} 5^b - 1 &= 2^c - 24, \qquad (1)\\ 4(5^{b-1} + 5^{b-2} + \ldots + 5 + 1) &= 8(2^{c-3} - 3). \end{aligned}$$

Pravá strana je dělitelná 8, proto číslo v závorce na levé straně je sudé. Jelikož je součtem b lichých čísel, je b sudé. Obě strany rovnice (1) rozložíme na

$$(5^{b/2} - 1)(5^{b/2} + 1) = 8(2^{c-3} - 3).$$

Ze tří po sobě jdoucích celých čísel $5^{b/2} - 1$, $5^{b/2}$ a $5^{b/2} + 1$ je jedno dělitelné třemi, přičemž číslo $5^{b/2}$ to zřejmě není. Proto je levá strana rovnice (1) dělitelná třemi. Avšak její pravá strana třemi dělitelná není, protože 3 nedělí 2^{c-3}.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních ohodnoťte kroky z výše popsaného postupu následovně:

A1. Vyjádření rozdílu zlomků ze zadání v podobě jednoho zlomku a konstatování, že musí mít konečný desetinný rozvoj: 1 bod
A2. Důkaz, že n je dělitelné 23: 1 bod
A3. Důkaz, že hledané n musí být tvaru $23 \cdot 2^a \cdot 5^b$: 2 body
A4. Redukce na rovnici $2^a \cdot 5^b + 23 = 2^c \cdot 5^d$ a zdůvodnění, že ji stačí řešit pro $a = d = 0$ a $b = c = 0$: 3 body
B1. Důkaz, že rovnice $2^a + 23 = 5^d$ má jediné řešení $(a, d) = (1, 2)$ (kterému odpovídá $n = 46$): 1 bod
B2. Důkaz, že rovnice $5^b + 23 = 2^c$ nemá řešení v kladných celých číslech: 2 body

Celkově pak za neúplná řešení udělte $\max(\mathrm{A1}, \mathrm{A2}, \mathrm{A3}, \mathrm{A4}) + \mathrm{B1} + \mathrm{B2}$ bodů.

Tvrzení o počítání zbytků není třeba dokazovat, včetně známého faktu, že zbytky mocnin po dělení týmž číslem se opakují. Je tedy v pořádku, pokud řešitel bez podrobnějšího zdůvodnění napíše například: „Mocniny čísla 2 dávají po dělení číslem 15 jen zbytky 2, 4, 8, 1.“