74. ročník Matematické olympiády (2024/25)

III. kolo kategorie Z9

Z9–III–1

Do divadla dorazili diváci buď pěšky, nebo auty, nebo autobusy. Diváků, kteří dorazili autobusy, bylo více než 150. Autobusů bylo šest a v každém bylo stejné množství diváků. Diváků, kteří dorazili pěšky nebo auty, bylo o 35 % méně než těch, kteří dorazili autobusy. Všech diváků bylo nejvýše 400.

Kolik přesně diváků bylo v divadle? Určete všechny možnosti. (*E. Novotná*)

Možné řešení. Pro zjednodušení budeme o divácích, kteří dorazili autobusy, mluvit jako o první skupině a o divácích, kteří dorazili pěšky nebo auty, jako o druhé skupině.

První skupina dorazila v šesti stejně obsazených autobusech. Tedy počet lidí v první skupině byl násobkem šesti. Ve druhé skupině bylo o 35 % méně lidí než v první neboli poměr velikostí druhé a první skupiny byl $65\,\% = \frac{65}{100}$. Tento zlomek v základním tvaru je $\frac{13}{20}$, tedy počet lidí v první skupině byl násobkem dvaceti.

Dohromady počet diváků v první skupině byl násobkem šesti a současně dvaceti. Nejmenší společný násobek těchto dvou čísel je 60. Pro násobky 60 větší než 150 vyjádříme velikost druhé skupiny a ověříme, zda součet velikostí obou skupin je menší než 400:

1. skupina	180	240	300	...
2. skupina	117	156	195	...
součet	297	396	495	...

S rostoucím počtem diváků v první skupině se celkový počet diváků dále zvětšuje, tedy vyhovující možnosti jsou v prvních dvou sloupcích tabulky. V divadle bylo buď 297, nebo 396 diváků.

Hodnocení. Po 1 bodu za každé vyhovující řešení; 2 body za postřehy o dělitelnosti počtu lidí v první skupině; 2 body za úplnost rozboru možností v rámci daných omezení.

Při jiných způsobech zkoušení možností hodnoťte důslednost při ověřování celočíselnosti počtů v obou skupinách.

Z9–III–2

Čtyřúhelník $DRAK$ má následující vlastnosti:

- je vepsán do kružnice,
- je osově souměrný podle přímky AD,
- trojúhelník RAK je rovnostranný.

V závislosti na velikosti strany AK vyjádřete velikosti úhlopříček a obsah čtyřúhelníku $DRAK$. (*L. Dedková*)

Možné řešení. Úhlopříčka KR je stranou rovnostranného trojúhelníku RAK. Platí tedy

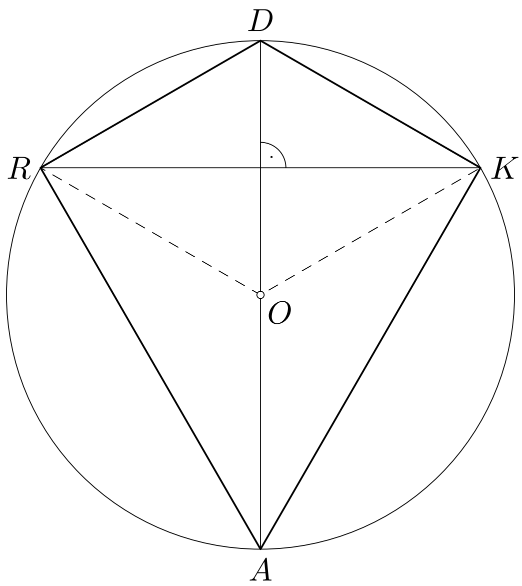
$$|KR| = |AK|.$$

Úhlopříčka AD je průměrem kružnice, do které je čtyřúhelník $DRAK$ vepsán, tj. průměrem kružnice opsané trojúhelníku RAK. V rovnostranném trojúhelníku splývá střed opsané kružnice s těžištěm, průsečíkem výšek atd. Poloměr opsané kružnice odpovídá $2/3$ výšky, a ta se rovná $\sqrt{3}/2$ velikosti strany trojúhelníku (lze najít v povolených tabulkách či odvodit pomocí Pythagorovy věty). Platí tedy

$$|AD| = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot |AK| = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot |AK|.$$

Čtyřúhelník $DRAK$ je osově souměrný podle přímky AD, tedy úhlopříčky KR a AD jsou kolmé. Obsah čtyřúhelníku $DRAK$ je

$$S_{DRAK} = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |KR| = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot |AK|^2.$$



Poznámky. Předchozí výpočet obsahu čtyřúhelníku $DRAK$ je založen na představě opsaného obdélníku se stranami shodnými s úsečkami AD a KR. Ke stejnému výsledku lze dospět také takto: obsah rovnostranného trojúhelníku RAK je $\sqrt{3}/4 \cdot |AK|^2$, obsah trojúhelníku DRK je třetinový (shoduje se s trojúhelníky ORK, OKA, OAR), celkem

$$S_{DRAK} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}\right) \cdot |AK|^2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot |AK|^2.$$

Úsečka AD je průměrem kružnice opsané trojúhelníku AKD. Ten je podle Thaletovy věty pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu K. Obsah deltoidu $DRAK$ je tedy roven obsahu obdélníku se stranami AK a DK. Přitom strana DK je shodná s poloměrem kružnice.

Hodnocení. Po 1 bodu za každý z výsledků (velikost KR, velikost AD, obsah $DRAK$); 2 body za pomocné vztahy a postřehy (výška rovnostranného trojúhelníku, poloměr opsané kružnice, kolmost úhlopříček apod.); 1 bod za kvalitu komentáře.

Z9–III–3

Najděte všechny dvojice přirozených čísel a a b, pro které platí:

$$7a + 4b + 74 = a \cdot b.$$

(*E. Novotná*)

Možné řešení. Pomocí neznámé b vyjádříme a:

$$\begin{aligned} 7a + 4b + 74 &= a \cdot b, \\ 7a - a \cdot b &= -4b - 74, \\ a &= \frac{4b + 74}{b - 7}. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Čísla a a b mají být přirozená, proto musí být $b > 7$ a $b - 7$ musí dělit $4b + 74$. Číslo $4b + 74$ můžeme vyjádřit jako $4b + 74 = 4(b - 7) + 102$, a proto $b - 7$ musí dělit 102. Prvočíselný rozklad čísla 102 je $2 \cdot 3 \cdot 17$. Tedy číslo 102 má osm (kladných) dělitelů. Pro každý z těchto dělitelů vyjádříme b a a podle předchozích vztahů:

$b - 7$	1	2	3	6	17	34	51	102
b	8	9	10	13	24	41	58	109
a	106	55	38	21	10	7	6	5

Hodnoty a a b uvedené v tabulce tvoří všechny vyhovující dvojice čísel (až na pořadí).

Poznámka. Úvodní úprava a následné úvahy mohou být zkráceny takto:

$$\begin{aligned} 7a + 4b + 74 &= a \cdot b, \\ 74 &= a \cdot b - 7a - 4b, \\ 102 &= (a - 4) \cdot (b - 7). \end{aligned} \tag{$**$}$$

Čísla a a b jsou určena možnými rozklady čísla 102 na dva (kladné) činitele. To vede právě k řešením popsaným výše.

Hodnocení. 3 body za vyjádření ($*$) a úvahy vedoucí k dělitelům čísla 102, resp. za vyjádření ($**$); 1 bod za dělitele čísla 102; 2 body za všechna řešení.

Při jiných způsobech zkoušení možností hodnoťte podle úplnosti postupu a komentáře.

Z9–III–4

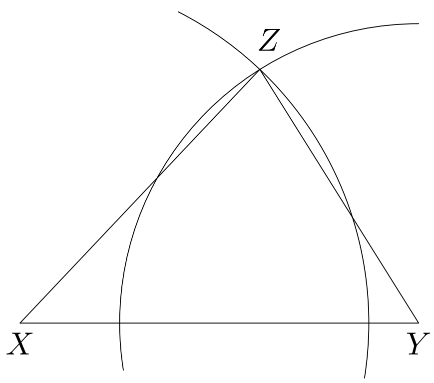
Sestrojte trojúhelník XYZ a obdélník $ABCD$ tak, aby platily následující podmínky:

- $|XY| = 8\,\text{cm}$, $|YZ| = 6\,\text{cm}$, $|XZ| = 7\,\text{cm}$,
- body X a Y leží na přímce AC,
- úsečky AC a XY jsou shodné,
- bod Z leží na přímce BD,
- obsah trojúhelníku ACZ je dvakrát větší než obsah trojúhelníku ABC.

Konstrukci popište a zdůvodněte. (*M. Petrová*)

Možné řešení. Trojúhelník XYZ je určen svými stranami. Jeho konstrukce je následující:

1) úsečka XY o velikosti $|XY| = 8\,\text{cm}$,
2) kružnice se středem X a poloměrem $|XZ| = 7\,\text{cm}$,
3) kružnice se středem Y a poloměrem $|YZ| = 6\,\text{cm}$,
4) bod Z je průsečíkem kružnic 2) a 3).

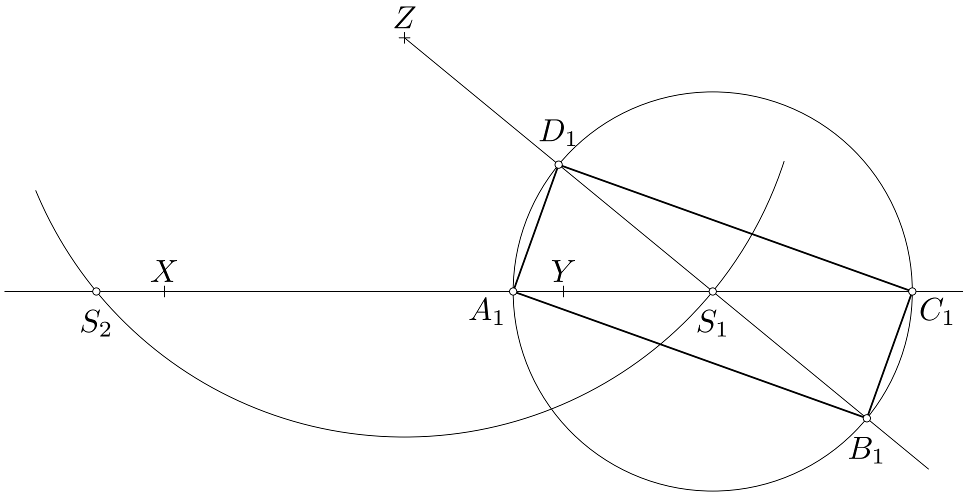


Úhlopříčky obdélníku $ABCD$ jsou shodné a protínají se ve svých středech; tento bod označíme S. Podle zadání platí

$$|BD| = |AC| = |XY| = 8\,\text{cm}.$$

Trojúhelníky ACZ a ABC mají společnou stranu AC a obsah ACZ má být dvakrát větší než obsah ABC. Proto vzdálenost bodu Z od přímky AC je dvakrát větší než vzdálenost bodu B od téže přímky. Dále body Z, B, D, S leží na jedné přímce a trojúhelníky ABC a CDA tvoří shodné části obdélníku $ABCD$. Celkem tedy platí:

$$|SZ| = 2 \cdot |SB| = 2 \cdot |SD| = |BD| = 8\,\text{cm}.$$



Konstrukce obdélníku $ABCD$:

1) přímka XY,
2) kružnice se středem Z a poloměrem $|XY| = 8\,\mathrm{cm}$,
3) bod S je průsečíkem přímky 1) a kružnice 2),
4) kružnice se středem S a poloměrem $\frac{1}{2}|XY| = 4\,\mathrm{cm}$,
5) body A a C jsou průsečíky přímky 1) a kružnice 4),
6) přímka SZ,
7) body B a D jsou průsečíky přímky 6) a kružnice 4).

Poznámky. Možné středy S (průsečíky ze třetího kroku konstrukce) jsou dva. Označení dvojic bodů A a C, resp. B a D (v pátém, resp. sedmém kroku konstrukce) je veskrze nahodilé. Úloha má (až na značení vrcholů) dvě řešení, výsledné obdélníky jsou navzájem shodné.

Z podmínky o obsazích trojúhelníků ACZ a ABC plyne, že body B a D leží na rovnoběžkách s přímkou XY, které jsou v poloviční vzdálenosti od XY jako bod Z. S tímto postřehem lze nahradit některé kroky v konstrukci.

Hodnocení. 1 bod za konstrukci trojúhelníku XYZ; 1 bod za odvození $|BD| = 8\,\mathrm{cm}$; 2 body za odvození $|SZ| = 8\,\mathrm{cm}$; 2 body za konstrukci a její popis. Diskuze o počtu řešení není nutná k zisku plného počtu bodů.