

I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

Ivan, Jarek, Kája a Luboš mají dohromady 90 známek. Kdyby měl Ivan o dvě známky méně, Jarek o dvě více, Kája dvojnásobek a Luboš polovinu toho, co nyní, měli by všichni stejně.

Kolik známek má každý z chlapců? (L. Hozová)

Možné řešení. Počty známek jednotlivých chlapců označíme jejich počátečními písmeny. Podle zadání platí

$$\begin{aligned} I + J + K + L &= 90, \\ I - 2 &= J + 2 = 2K = \frac{L}{2}. \end{aligned}$$

Hodnotu na druhém řádku označíme Z , pomocí ní vyjádříme ostatní neznámé,

$$I = Z + 2, \quad J = Z - 2, \quad K = \frac{Z}{2}, \quad L = 2Z,$$

dosadíme do první rovnice a dostáváme $\frac{9}{2}Z = 90$. Tedy $Z = 20$ a z předchozího vyjádření máme

$$I = 22, \quad J = 18, \quad K = 10, \quad L = 40.$$

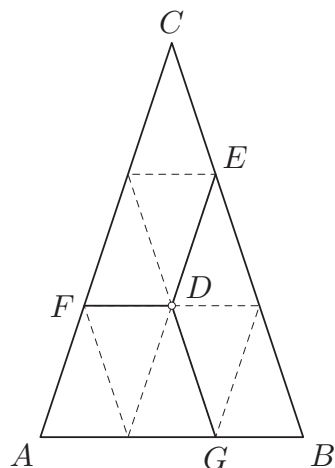
Ivan má 22 známek, Jarek 18, Kája 10 a Luboš 40.

Z8–I–2

Sestrojte rovnoramenný trojúhelník se základnou délkou 12 cm a výškou k základně velikosti 18 cm. Rozdělte trojúhelník na tři lichoběžníky o stejném obsahu. (L. Dedková)

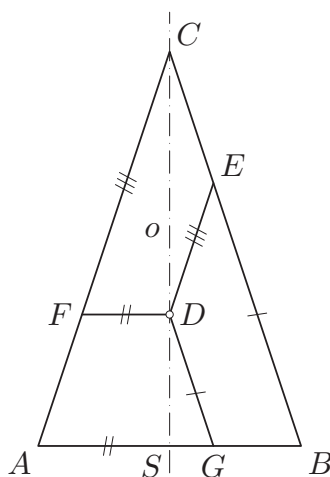
Možné řešení. Základny lichoběžníků jsou rovnoběžné. Strany hledaných lichoběžníků buď náleží stranám trojúhelníku, nebo jsou s nimi rovnoběžné. Rozborem možností zjistíme, že žádná strana žádného lichoběžníku nemůže zabírat celou stranu trojúhelníku a že žádná strana trojúhelníku nemůže být tvořena dvěma rameny, ani dvěma základnami lichoběžníků. Dělení trojúhelníku na lichoběžníky je dáno jedním bodem uvnitř trojúhelníku a třemi rovnoběžkami se stranami trojúhelníku (viz první z níže uvedených obrázků).

Potřebujeme najít dělicí bod (společný bod lichoběžníků) tak, aby obsahy lichoběžníků byly stejné. Pro tento účel je vhodné využít obvyklá dělení trojúhelníku na menší shodné trojúhelníky. V našem případě pomáhá rozdělení na trojúhelníky s třetinovými stranami vzhledem k danému trojúhelníku. Takových trojúhelníků je devět a každý z hledaných lichoběžníků je složen ze tří (viz druhý obrázek).



- úsečka AB velikosti 12 cm,
- o = osa úsečky AB a S = střed úsečky AB ,
- C = bod na přímce o ve vzdálenosti $|SC| = 18$ cm,
- trojúhelník ABC .

- D = bod na úsečce SC ve vzdálenosti $|SD| = 6$ cm,
- rovnoběžky se stranami trojúhelníku ABC jdoucí bodem D ,
- E, F, G = průsečíky těchto rovnoběžek se stranami trojúhelníku,
- lichoběžníky $AGDF, BEDG, CFDE$.



19

Jinou konstrukci bodu D a lichoběžníků lze založit na třetinovém dělení stran trojúhelníku ABC a vhodném spojování takto vzniklých bodů (viz druhý z výše uvedených obrázků).

Z8–I–3

Pro čísla a, b, c, d platí:

- číslo a dává po dělení třemi zbytek 1,
- číslo b dává po dělení šesti zbytek 2,
- $a - b = d - c$,
- číslo d je dělitelné třemi.

Jaký zbytek po dělení devíti může dávat číslo c ? Najděte všechny možnosti.

(E. Semerádová)

Možné řešení. Možná čísla, která po dělení třemi dávají zbytek 1, resp. po dělení šesti zbytek 2, jsou

$$a = 1, 4, 7, 10, 13, \dots$$

$$b = 2, 8, 14, 20, 26, \dots$$

Nezáporné rozdíly $a - b$ řazené vzestupně jsou

$$a - b = 2, 5, 8, 11, \dots$$

Sousední čísla v tomto výpisu se liší o 3 a nejmenší číslo je 2, tedy zbytek po dělení $a - b$ třemi je 2. Opačný rozdíl $b - a$ pak po dělení třemi dává zbytek 1.

Z podmínky $a - b = d - c$ máme $c = d + b - a$, kde číslo d je dělitelné třemi a $b - a$ dává po dělení třemi zbytek 1. Proto také číslo c dává po dělení třemi zbytek 1:

$$c = 1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots \quad (*)$$

Možné zbytky po dělení čísla c devíti jsou 1, 4, 7.

Poznámky. Čtveřic čísel a, b, c, d splňujících podmínky ze zadání je nepřeberné množství a všechny uvedené zbytky po dělení čísla c devíti opravdu mohou nastat. Pro příklad stačí uvážit čísla $a = 4$ a $b = 2$ a posloupnost čísel c jako v (*), pro niž odpovídající posloupnost čísel d je

$$d = 3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots$$

Dělení se zbytkem je platné v oboru všech celých čísel (ne jen těch nezáporných). Tedy např. čísla, která po dělení třemi dávají zbytek 1, jsou také

$$a = -2, -5, -8, -11, -14, \dots$$

To, že jsme se v řešení úlohy omezili na nezáporná čísla, ničemu nevadí, neboť nás zajímaly hlavně zbytky.

Předchozí výčty a úvahy vedoucí k (*) je možné nahradit následujícími obecnými vyjádřeními. Čísla a, b, d jsou podle zadání tvaru

$$a = 3k + 1, \quad b = 6l + 2, \quad d = 3m,$$

kde k, l, m jsou celá čísla. Číslo c je pak vyjádřeno jako

$$c = d + b - a = 3(m + 2l - k) + 1.$$

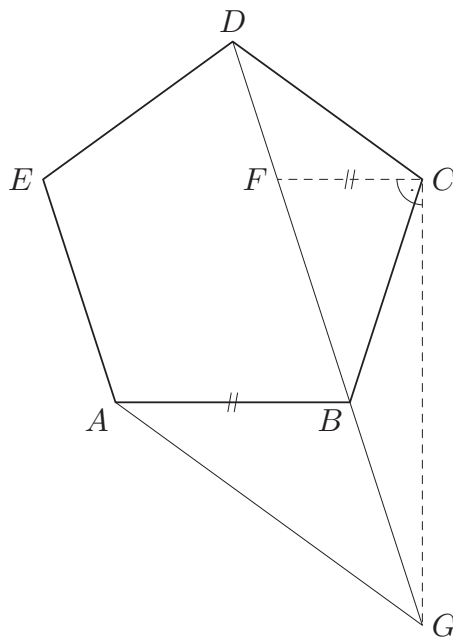
Vskutku číslo c po dělení třemi dává zbytek 1.

Z8–I–4

Je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Rovnoběžka s přímkou AB procházející bodem C protíná přímkou BD v bodě F . Kolmice k přímce CF procházející bodem C protíná přímkou BD v bodě G .

Určete velikost úhlu AGF .

(*P. Bak*)



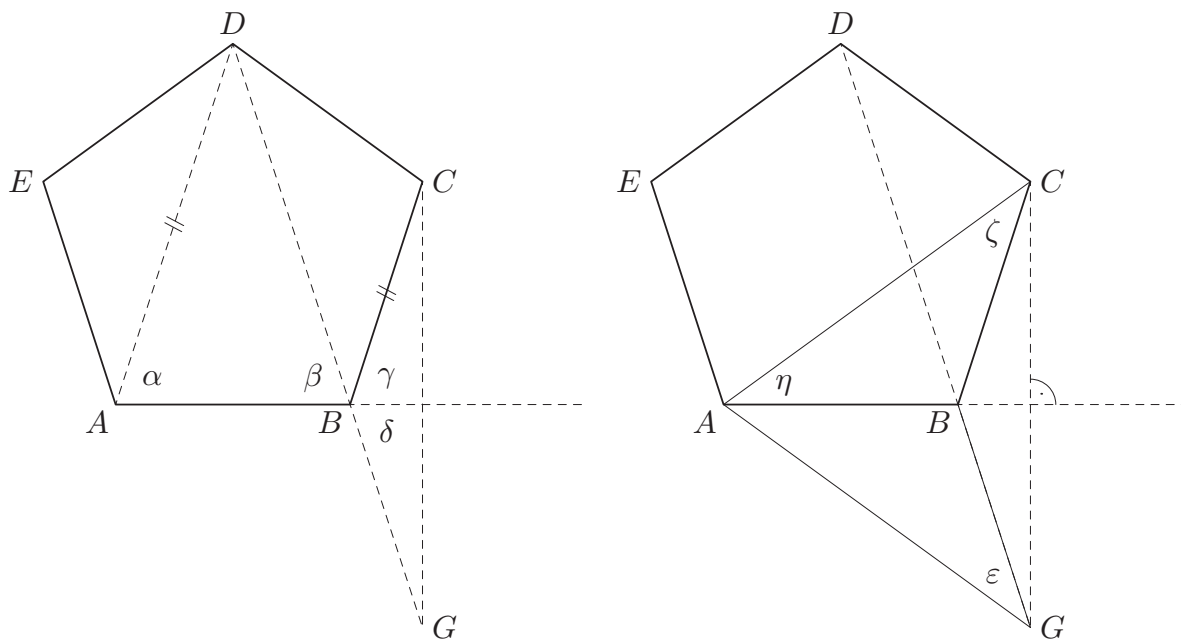
Možné řešení. V následujících úvahách budeme používat několik vlastností pravidelného pětiúhelníku:

- V pravidelném pětiúhelníku jsou všechny strany navzájem shodné a stejně tak všechny úhlopříčky. Tedy jakýkoli trojúhelník tvořený třemi vrcholy pravidelného pětiúhelníku je rovnoramenný.
- Pravidelný pětiúhelník je osově souměrný podle pěti různých os. Při každé z těchto souměrností se vždy jedna strana a nepřiléhající úhlopříčka zobrazují samy na sebe, tedy jsou navzájem rovnoběžné.
- Obecný pětiúhelník sestává ze tří trojúhelníků, tedy součet velikostí jeho vnitřních úhlů je $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$. Pravidelný pětiúhelník má všechny vnitřní úhly shodné, tedy velikost vnitřního úhlu pravidelného pětiúhelníku je $540^\circ : 5 = 108^\circ$.

V našem příkladu ukážeme, že trojúhelník ABG je shodný s trojúhelníkem ABC , tedy hledaný úhel najdeme mezi úhly vymezenými stranami a úhlopříčkami pětiúhelníku. Začneme tím, že si uvědomíme několik vztahů mezi úhly vyznačenými na prvním z níže uvedených obrázků.

Trojúhelník ABD je rovnoramenný, tedy úhly u základny jsou shodné, $\alpha = \beta$. Přímky AD a BC jsou rovnoběžné, tedy souhlasné úhly u vrcholů A a B jsou shodné, $\alpha = \gamma$. Úhly β a δ jsou vrcholové úhly s vrcholem B , tedy jsou také shodné, $\beta = \delta$. Celkem tak platí, že všechny vyznačené úhly jsou navzájem shodné.

Přímka CG je kolmá k přímce CF , a ta je rovnoběžná s přímkou AB . Tedy přímky CG a AB jsou kolmé. To spolu s předchozím poznatkem ($\gamma = \delta$) znamená, že body C a G jsou osově souměrné podle přímky AB . Proto také trojúhelníky ABC a ABG jsou osově souměrné a hledaný úhel u vrcholu G je shodný s vnitřním úhlem trojúhelníku ABC u vrcholu C . To se značením jako na druhém obrázku znamená, že $\varepsilon = \zeta$.



Trojúhelník ABC je rovnoramenný, tedy úhly u základny jsou shodné, $\zeta = \eta$. Vnitřní úhel u vrcholu B je vnitřním úhlem pětiúhelníku, tedy jeho velikost je 108° . Součet vnitřních úhlů tohoto trojúhelníku je $2\zeta + 108^\circ = 180^\circ$, odkud dostáváme $\zeta = 36^\circ$.

Velikost úhlu AGF je 36° .

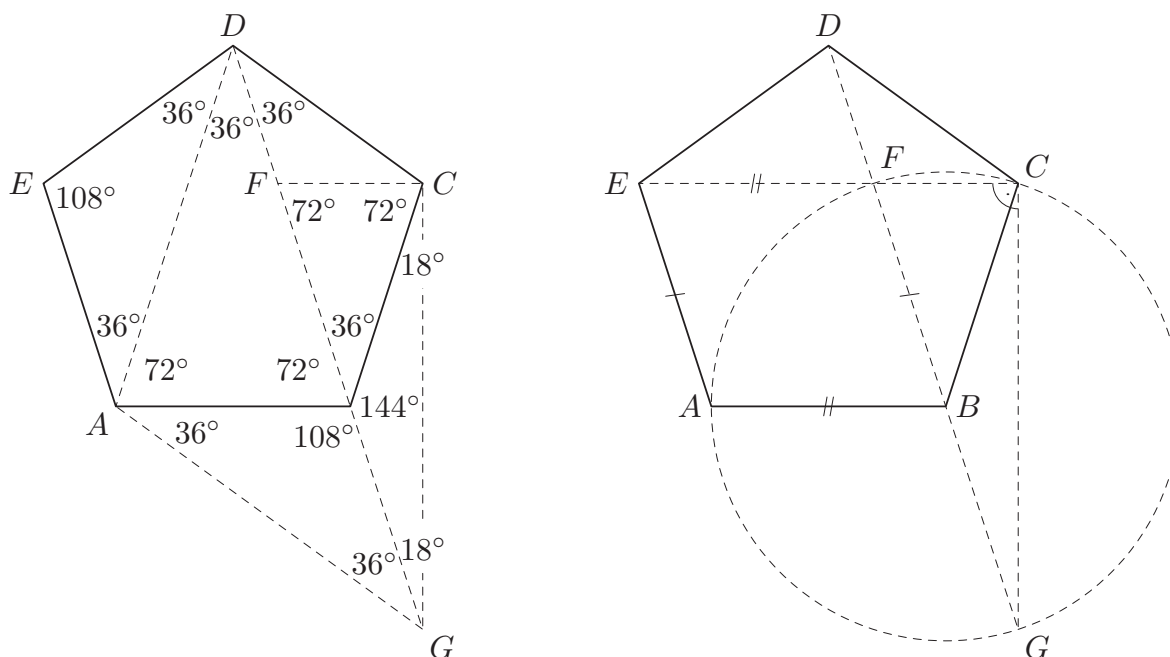
Poznámky. Shodnost úhlů γ a δ je ekvivalentní shodnosti sousedních úhlů ABC a ABG , a tu lze zdůvodnit takto: Úhel ABG se shoduje s úhlem BAE (střídavé úhly vzhledem k rovnoběžkám $AE \parallel BD$), úhel BAE se shoduje s úhlem ABC (vnitřní úhly pravidelného pětiúhelníku), tedy úhel ABG se shoduje s úhlem ABC .

Velikosti zmiňovaných úhlů (a mnohých dalších) lze snadno vyjádřit, i když k dořešení úlohy to nutné není. Možnosti jejich odvození jsou rozmanité, viz též úlohu **Z8–I–3** v loňském ročníku MO. Pro představu některé hodnoty shrneme v prvním z níže uvedených obrázků.

Bod F nebyl nijak podstatný, potřebovali jsme pouze rovnoběžnost přímek CF a AB . Bod F je vlastně průsečíkem úhlopříček BD a CE .

Se znalostí Thaletovy věty, resp. věty opačné lze shodnost úseček BC a BG odvodit takto: Protože $AB \parallel CE$, $AE \parallel BD$ a strany AB , AE jsou shodné, je čtyřúhelník $ABFE$ kosočtvercem. Všechny strany kosočtverce jsou shodné a shodují se také se stranou BC ,

zejména úsečky BF a BC jsou shodné. Protože trojúhelník FCG je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu C , leží tento bod na (Thaletově) kružnici s průměrem FG . Protože BF se shoduje s BC , je bod B středem této kružnice a úsečky BF , BC , BG jsou jejími poloměry, viz druhý obrázek.



Z8–I–5

Podíl nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele čísel a a b je 75. Součet čísel a a b je větší než 100 a menší než 200.

Určete všechny možné dvojice čísel a a b s uvedenými vlastnostmi. (*E. Semerádová*)

Možné řešení. Největší společný dělitel čísel a a b označíme D . Čísla a a b jsou pak tvaru

$$a = A \cdot D, \quad b = B \cdot D,$$

kde A a B jsou nesoudělná čísla. Protože pořadí čísel není důležité, budeme v dalším pro zjednodušení předpokládat, že $a < b$ neboli $A < B$.

S tímto značením je nejmenší společný násobek čísel a a b vyjádřen jako $A \cdot B \cdot D$. Podíl nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele čísel a a b je 75, tedy

$$A \cdot B = 75.$$

Protože $75 = 3 \cdot 5 \cdot 5$ a čísla A a B jsou nesoudělná, platí buď $A = 1$ a $B = 75$, nebo $A = 3$ a $B = 25$. V každém z těchto případů zjistíme, pro které hodnoty D platí podmínka o součtu $a + b$.

- Pro $A = 1$ a $B = 75$ dostáváme:

D	a	b	$100 < a + b < 200$
1	1	75	ne
2	2	150	ano
3	3	225	ne

- Pro $A = 3$ a $B = 25$ dostáváme:

D	a	b	$100 < a + b < 200$
1	3	25	ne
2	6	50	ne
3	9	75	ne
4	12	100	ano
5	15	125	ano
6	18	150	ano
7	21	175	ano
8	24	200	ne

S rostoucím D se zvětšuje i součet $a + b$, tedy není třeba dalšího zkoušení. Všechny možné dvojice čísel a, b s uvedenými vlastnostmi (až na pořadí) jsou:

2, 150; 12, 100; 15, 125; 18, 150; 21, 175.

Poznámka. Pokud N označíme nejmenší společný násobek čísel a a b , pak z úvodního rozboru máme $N = A \cdot B \cdot D$, a tedy

$$N \cdot D = (A \cdot D) \cdot (B \cdot D) = a \cdot b.$$

Vyjádřeno slovy: součin nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele dvou čísel je roven součinu těchto čísel. S tímto postřehem lze pracovat od začátku a zjednodušit některá značení.

Z8–I–6

Rybář Štika chytil několik ryb. Když prodal tři nejtlustší ryby majiteli místní restaurace, snížil celkovou hmotnost svého úlovku o 35 %. Když dal tři nejhubenější ryby svému psovi, snížil hmotnost zbývajících ulovených ryb o pět třináctin.

Kolik ryb chytil pan Štika?

(*L. Hozová*)

Možné řešení. Tři nejtlustší ryby odpovídají 35 % váhy celého úlovku, zbývající ryby odpovídají 65 %. Pět třináctin tohoto zbytku tvoří čtvrtinu ($\frac{5}{13} \cdot \frac{65}{100} = \frac{1}{4}$), tedy tři nejhubenější ryby odpovídají 25 % váhy celého úlovku. Zbylý neznámý počet ryb tak odpovídá 40 % váhy celého úlovku ($100 - 35 - 25 = 40$).

Protože zbylé ryby váží víc než tři nejtlustší, byly alespoň čtyři. Protože zbylé ryby váží méně než dvojnásobek váhy tří nejhubenějších, bylo jich nanejvýš pět. Dále ryba ze skupiny tří nejtlustších váží průměrně $11,\overline{6}$ % váhy celého úlovku ($35 : 3 = 11,\overline{6}$) a ryba ze skupiny tří nejhubenějších váží průměrně $8,\overline{3}$ % váhy celého úlovku ($25 : 3 = 8,\overline{3}$). S těmito poznatky rozhodneme o počtu zbylých ryb:

- Kdyby zbylých ryb bylo pět, pak by jedna vážila průměrně 8 % váhy celého úlovku ($40 : 5 = 8$), což je méně než průměrná váha nejhubenějších ryb. To není možné.
- Kdyby zbylé ryby byly čtyři, pak by jedna vážila průměrně 10 % váhy celého úlovku ($40 : 4 = 10$), což je mezi průměrnými váhami nejtlustších a nejhubenějších ryb. To je možné.

Zbylé ryby byly čtyři. Pan Štika chytil deset ryb.

Poznámka. Pokud označíme n celkový počet ryb, potom vztahy mezi průměrnými vahami tří nejtlustších, $n - 6$ zbylých a tří nejhubenějších ryb jsou:

$$\frac{35}{3} \geq \frac{40}{n-6} \geq \frac{25}{3}.$$

To po úpravách vede k nerovnostem $n \geq \frac{330}{35}$ a $n \leq \frac{270}{25}$. Jediné vyhovující přirozené číslo je $n = 10$.