

## I. kolo kategorie Z7

## Z7–I–1

Andulka a Zuzana pojídaly švestky. První den snědla Andulka tři čtvrtiny toho, co týž den snědla Zuzana. Druhý den snědla Zuzana tři poloviny toho, co týž den snědla Andulka. Dohromady za oba dny snědly 31 švestek a každé děvče každý den snědlo celý počet švestek.

Kolik švestek snědla za oba dny Andulka?

(L. Hozová)

**Možné řešení.** První den Andulka snědla tři sedminy toho, co týž den snědly společně, druhý den snědla dvě pětiny toho, co týž den snědly společně. Zejména počet švestek společně snědených za první den byl násobkem 7, za druhý den násobkem 5. Celkem za oba dny snědly 31 švestek. Pro násobky 7 nepřevyšující 31 vyjádříme rozdíl od 31 a ověříme dělitelnost pěti:

|        |    |    |     |    |
|--------|----|----|-----|----|
| 1. den | 7  | 14 | 21  | 28 |
| 2. den | 24 | 17 | 10  | 3  |
| děl. 5 | ne | ne | ano | ne |

První den společně snědly 21 švestek, druhý den jich snědly 10.

První den Andulka snědla 9 švestek ( $\frac{3}{7} \cdot 21 = 9$ ), druhý den snědla 4 švestky ( $\frac{2}{5} \cdot 10 = 4$ ). Andulka za oba dny snědla 13 švestek.

**Poznámka.** Přehledný záznam konzumace švestek vypadá takto:

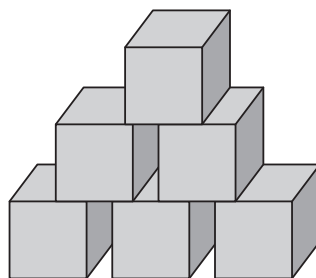
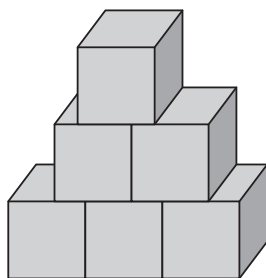
|        | Andulka | Zuzana | celkem |
|--------|---------|--------|--------|
| 1. den | 9       | 12     | 21     |
| 2. den | 4       | 6      | 10     |
| celkem | 13      | 18     | 31     |

## Z7–I–2

Mikuláš postavil pyramidu ze šesti stejných krychlí s hranami délky 7 cm. Spodní patro tvořily tři krychle, prostřední patro dvě krychle a horní patro jedna krychle. Sousední krychle v každém patře měly společnou stěnu, patra navzájem nepřechňovala. Vítězslav posunul krychle tak, že každá krychle v horních dvou patrech stála na dvou spodnějších krychlích a mezi sousedními krychlami ve spodních dvou patrech byly mezery široké třetinu hrany krychle. Až na tyto mezery patra navzájem nepřechňovala.

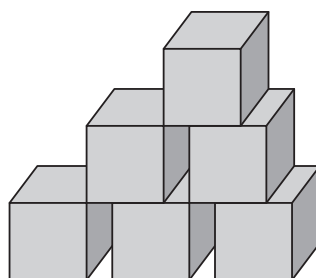
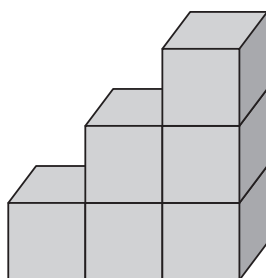
O kolik  $\text{cm}^2$  se liší povrchy původní a upravené pyramidy?

(V. Dedek)



**Možné řešení.** Sousední krychle ve spodním a prostředním patře původní pyramidy měly 3 společné svislé stěny. Tedy posunutím krychlí vzniklo 6 svislých stěn navíc.

Ke změně povrchu přispívají také rozdíly na úrovni vodorovných rozhraní mezi patry. Ty nezávisí na míře posunutí pater vůči sobě. Pro vyjádření přírůstku povrchu je výhodné patra vhodně posunout (při zachování všech podmínek ze zadání). Pyramidy mohou vypadat např. takto:



V nové pyramidě přibýly  $2/3$  stěny mezi horním a prostředním patrem ( $1/3$  na spodní stěně horní kostky a  $1/3$  na horní stěně pravé prostřední kostky) a  $4/3$  stěny mezi prostředním a spodním patrem ( $2/3$  na spodních stěnách prostředních kostek a  $2/3$  na horních stěnách dvou spodních kostek).

Celkem je v povrchu nové pyramidy o osm stěn víc než v původní pyramidě ( $6 + 2/3 + 4/3 = 8$ ). Jedna stěna má obsah  $49 \text{ cm}^2$  ( $7 \cdot 7 = 49$ ). Povrchy původní a nové pyramidy se liší o  $392 \text{ cm}^2$  ( $8 \cdot 49 = 392$ ).

### Z7–I–3

Pankrác, Servác a Bonifác se ubytovali v hotelu. Čísla pokojů byla trojmístná a číslice na místě stovek určovala patro, na kterém se pokoj nacházel. U snídaně si podle přívěsků na klíčích od pokojů všimli, že:

- v číslech jejich pokojů jsou použity všechny číslice od 1 do 9,
- Pankrácovo číslo je dělitelné devíti, Servácovo číslo je dělitelné osmi, Bonifácovo číslo je dělitelné sedmi,
- Bonifácovo číslo je čtyřikrát větší než Pankrácovo číslo,
- Servác bydlí na patře mezi Pankrácem a Bonifácem.

Určete čísla pokojů Pankráce, Serváce a Bonifáce.

(L. Hozová, E. Novotná)

**Možné řešení.** Bonifácovo číslo je čtyřnásobkem Pankrácova čísla a Pankrácovo číslo je dělitelné devíti, tedy Bonifácovo číslo je násobkem 36. Současně je Bonifácovo číslo dělitelné sedmi, tedy je dělitelné 252 (čísla 36 a 7 jsou nesoudělná a  $36 \cdot 7 = 252$ ).

Trojmístné násobky čísla 252 jsou

252, 504, 756,

a to jsou možná Bonifácova čísla. V prvním z těchto čísel se opakuje číslice 2, druhé obsahuje číslici 0. Oba tyto případy odporují zadání. Tedy Bonifácovo číslo může být jedině 756 a Pankrácovo číslo může být jedině  $756 : 4 = 189$ .

Dosud byly použity navzájem různé číslice od 1 do 9. Nebyly použity číslice 2, 3, 4, tedy Servácovo číslo může být jedno z následujících čísel:

234, 324, 342, 432, 423, 243.

Každé z těchto čísel je mezi Pankrácovým a Bonifácovým číslem, dělitelné osmi je však pouze 432. Servácovo číslo může být jedině 432. To spolu Pankrácovým a Bonifácovým číslem vyhovuje všem podmínkám ze zadání.

Pankrác měl pokoj číslo 189, Servác 432 a Bonifác 756.

**Poznámka.** S podmínkami dělitelnosti lze nakládat různě. Např. také Pankrácovo číslo musí být dělitelné sedmi, současně je dělitelné devíti, takže je dělitelné 63.

#### Z7–I–4

V jedné z pěti nádob očíslovaných 1, 2, 3, 4, 5 je mince. Doprovodné nápisy oznamují:

„Mince je v nádobě s lichým číslem.“

„Mince je v nádobě s číslem větším než 3.“

„Mince je v nádobě s číslem menším než 4.“

Pravdomluvný hlídač s bezchybným úsudkem dodává:

„Jeden z nápisů není pravdivý, zbylé dva pravdivé jsou. Přestože vím, který nápis pravdivý není, neumím určit, ve které nádobě je mince.“

Rozhodněte, který z nápisů není pravdivý.

(K. Pazourek)

**Možné řešení.** Postupně prověříme tři případy podle toho, který nápis nebyl pravdivý.

- Předpokládejme, že pravdivý nebyl první nápis (a zbylé dva byly pravdivé). Pak by mince měla být v nádobě se sudým číslem větším než 3 a současně menším než 4. To není možné.
- Předpokládejme, že pravdivý nebyl druhý nápis (a zbylé dva byly pravdivé). Pak by mince měla být v nádobě s lichým číslem menším než 4. To je možné a mince by v takovém případě byla buď v nádobě 1, nebo 3.
- Předpokládejme, že pravdivý nebyl třetí nápis (a zbylé dva byly pravdivé). Pak by mince měla být v nádobě s lichým číslem větším než 3 a ne menším než 4. To je možné a mince by v takovém případě byla v nádobě 5.

Možné případy jsou poslední dva. Přitom nádoba, ve které se mince nachází, je jednoznačně určena ve třetím případě, zatímco ve druhém případě nikoli. Nepravdivý nápis je ten druhý.

**Poznámka.** Druhý a třetí nápis si odporují, takže nemohly být oba pravdivé. Nepravdivý nápis byl jen jeden, tedy to byl buď druhý, nebo třetí; první nápis byl nutně pravdivý.

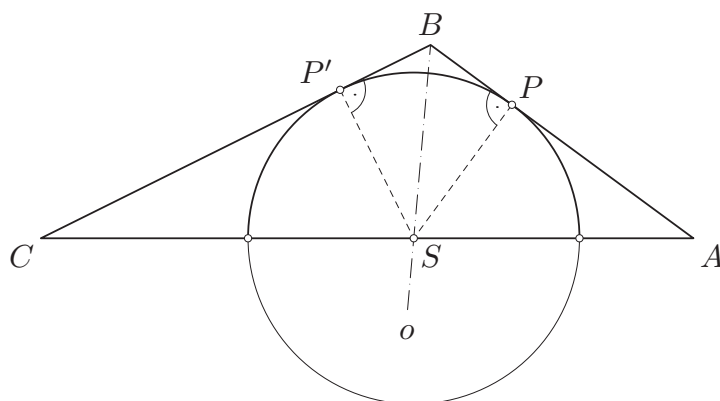
### Z7–I–5

Je dán trojúhelník  $ABC$  s délkami stran  $|AB| = 6$  cm,  $|BC| = 8$  cm a  $|AC| = 12$  cm.

Sestrojte půlkružnici, jejíž krajní body leží na straně  $AC$  a která se dotýká stran  $AB$  a  $BC$ . (K. Pazourek)

**Možné řešení.** Aby se půlkružnice dotýkala stran  $AB$  a  $BC$ , musí mít střed na ose úhlu  $ABC$ . Aby krajní body půlkružnice ležely na straně  $AC$ , musí mít střed na této straně.

Tedy střed hledané půlkružnice je průsečíkem osy úhlu  $ABC$  a strany  $AC$ . Poloměr je pak určen patou kolmice ze středu k přímce  $AB$  či k přímce  $BC$ . (Tyto úsečky jsou shodné právě proto, že střed leží na ose úhlu  $ABC$ , viz shodnost trojúhelníků  $BSP$  a  $BSP'$  na obrázku.)



Konstrukce:

- $o$  = osa úhlu  $ABC$ ,
- $S$  = průnik přímek  $o$  a  $AC$ ,
- $P$  = pata kolmice z bodu  $S$  k přímce  $AB$  (či  $BC$ ),
- kružnice se středem  $S$  a poloměrem  $SP$ ,
- půlkružnice vymezená přímkou  $AC$  a bodem  $P$ .

**Poznámka.** Zadaný trojúhelník je tupoúhlý s tupým úhlem u vrcholu  $B$  a dotykové body půlkružnice vskutku vychází na stranách trojúhelníku. V obecném trojúhelníku úloha řešení mít nemusí. Omezující jsou právě zúžení na strany (necelé přímky) a půlkružnice (necelé kružnice).

### Z7–I–6

Káťa a Škubánek smaží každý na své pánvičce jednu palačinku za druhou. Oba začali smažit současně, Kátě trvá každá palačinka tři minuty, Škubánkovi trvá každá palačinka čtyři minuty. Každých pět minut od začátku smažení se objeví mlsný kocour Luciáš. Pokud se Káťa i Škubánek věnují smažení, tak jim jednu hotovou palačinku ukradne, pokud zrovna přendávají palačinku z pánvičky na talíř, tak se schová a palačinky nechá být.

Kolik palačinek musí Káťa se Škubánkem usmažit, aby jim zbylo 150? Jak dlouho jim to bude trvat? (M. Petrová)

**Možné řešení.** Přehled prvních 20 minut smažení vypadá takto:

|          | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Káťa     |   |   | + |   |   | + |   |   | + |    |    | +  |    |    | +  |    |    | +  |    |    |
| Škubánek |   |   |   | + |   |   |   | + |   |    |    | +  |    |    |    | +  |    |    |    | +  |
| Luciáš   |   |   |   |   | – |   |   |   |   | –  |    |    |    |    | =  |    |    |    |    | =  |

Zde + značí jednu palačinku na talíři navíc, – značí o jednu palačinku méně při úspěšném Luciášově pokusu a = značí žádnou změnu při neúspěšném Luciášově pokusu.

Nejmenší časový úsek, na jehož konci se potkávají všichni tři, trvá 60 minut (nejmenší společný násobek intervalů Káti, Škubánka a Luciáše). Během této doby se předchozí schéma zopakuje třikrát. Tedy Káťa usmaží 20 palačinek, Škubánek usmaží 15 palačinek a Luciáš se objeví 12krát. Luciáš se potkává s Kátou v minutách 15, 30, 45, 60, se Škubánkem v minutách 20, 40, 60 (přičemž v 60 minutě se potkává s oběma) a v těchto minutách nekrade. Ve svých zlodějských pokusech je tedy úspěšný jen šestkrát. Celkem za 60 minut Káťa se Škubánkem usmaží 35 palačinek, ale na talíři jich zbude 29.

Za pět hodin Káťa se Škubánkem usmaží 175 palačinek, na talíři jich zbude 145. Z úvodního přehledu je patrné, že k chybějícím pěti palačinkám se dopravují po dalších 12 minutách — celkem jich usmaží sedm, ale dvě jim Luciáš ukradne.

Káťa se Škubánkem musí usmažit 182 palačinek a bude jim to trvat 5 hodin a 12 minut.