

I. kolo kategorie Z6

Z6–I–1

Pan Vaflička smaží a prodává koblížky, pan Koblížek peče a prodává vafličky. Oba cukráři mají každý týden otevřeno od pondělí do pátku. Libuška u nich kupuje každé pondělí dvě vafličky a jeden koblížek, každé úterý tři koblížky a jednu vafličku, každou středu čtyři koblížky, každý čtvrtek tři vafličky a každý pátek dva koblížky a dvě vafličky. Pan Koblížek si jednoho dne všiml, že od prvního pondělí tohoto měsíce prodal Libušce celkem 30 vafliček.

Kolik koblížků prodal Libušce za stejné období pan Vaflička? (M. Petrová)

Možné řešení. Za jeden týden Libuška koupí 8 vafliček ($2 + 1 + 0 + 3 + 2 = 8$). Třicet prodaných vafliček odpovídá nákupu za tři celé týdny a šesti vafličkám ve čtvrtém týdnu ($30 = 3 \cdot 8 + 6$). Šest vafliček ve čtvrtém týdnu má po nákupu ve čtvrtek ($2 + 1 + 0 + 3 = 6$).

Za jeden týden Libuška koupí 10 koblížků ($1 + 3 + 4 + 0 + 2 = 10$). Počet koblížků, které jí pan Vaflička prodal za tři celé týdny a první čtyři dny ve čtvrtém týdnu, byl

$$3 \cdot 10 + 1 + 3 + 4 + 0 = 38.$$

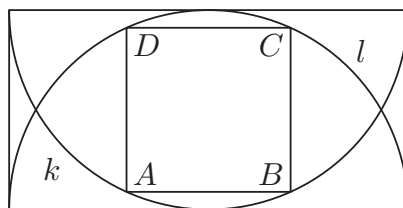
Poznámka. Ke stejnému výsledku lze dospět postupným vypisováním a sčítáním Libuščiných nákupů.

Z6–I–2

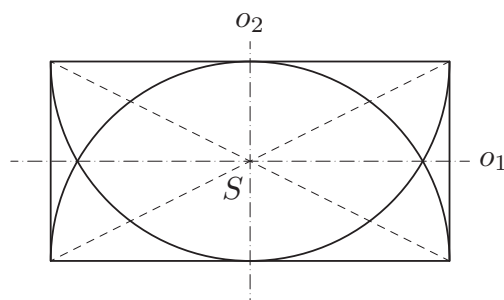
V obdélníku se stranami délek 4 cm a 8 cm jsou dány půlkružnice k a l , jejichž krajní body leží ve vrcholech obdélníku.

Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby vrcholy A a B ležely na půlkružnici k , vrcholy C a D ležely na půlkružnici l a strany čtverce byly rovnoběžné se stranami obdélníku.

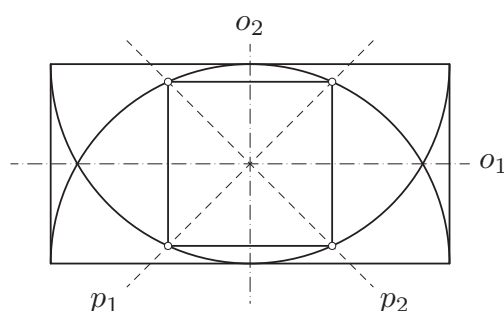
(K. Pazourek)



Možné řešení. Všechny souměrnosti obdélníku jsou též souměrnostmi doplněných půlkružnic. Jedná se o dvě osové souměrnosti (jejichž osy o_1 , o_2 jsou osami dvojic protilehlých stran obdélníku) a středovou souměrnost (jejíž střed S je průsečíkem os souměrností neboli průsečíkem úhlopříček obdélníku).



Strany čtverce $ABCD$ mají být rovnoběžné se stranami obdélníku, proto výše popsané souměrnosti jsou také souměrnostmi čtverce. Zejména střed čtverce splývá se středem obdélníku. Navíc ve čtverci jsou úhlopříčky dalšími osami souměrností (které označíme p_1, p_2). Zejména tyto úhlopříčky jsou navzájem kolmé a půlí vnitřní úhly čtverce (stejně jako úhly vymezené osami o_1, o_2).



Vrcholy čtverce lze sestavit např. takto:

- S = průsečík úhlopříček obdélníku,
- o_1, o_2 = rovnoběžky se stranami obdélníku jdoucí bodem S ,
- p_1, p_2 = osy úhlů daných přímkami o_1, o_2 ,
- A, B, C, D = průsečíky přímek p_1, p_2 s půlkružnicemi k, l .

Poznámky. Delší strana daného obdélníku je dvakrát delší než kratší strana, tedy půlkružnice k, l se dotýkají jeho delších stran. Jedna z os o_1, o_2 prochází těmito body dotyku, zatímco druhá prochází průsečíky půlkružnic k, l . Úloha včetně uvedeného řešení dává smysl i pro obecný poměr stran.

Z6–I–3

Pětimístným palindromem myslíme takové pětimístné číslo, které má na místě jednotek stejnou číslici jako na místě desetitisíců a na místě desítek stejnou číslici jako na místě tisíců.

Najděte nejmenší pětimístný palindrom dělitelný 36.

(I. Jančígová)

Možné řešení. Číslo 36 má mnoho dělitelů a každým z nich je hledaný palindrom také dělitelný. Vzhledem k tomu, že $36 = 4 \cdot 9$ a čísla 4 a 9 jsou nesoudělná, stačí kontrolovat dělitelnost právě těmito čísly:

- Dělitelnost čtyřmi znamená, že poslední dvojčíslí je dělitelné čtyřmi. Nejmenší dvojčíslí dělitelné čtyřmi s nejmenší nenulovou číslicí na místě jednotek je 12, tedy palindrom je tvaru:

$$21 * 12$$

- Dělitelnost devíti znamená, že ciferný součet je dělitelný devíti. Nejmenší možné doplnění předchozího tvaru je:

$$21312$$

Nejmenší pětímístný palindrom dělitelný 36 je 21312.

Jiné řešení. Každý dělitel čísla 36 je také dělitelem hledaného palindromu. Zejména je palindrom dělitelný dvěma a sudé pětímístné palindromy řazené vzestupně jsou:

20002, 20102, 20202, 20302, 20402, 20502, 20602, 20702, 20802, 20902,
21012, 21112, 21212, 21312, ...

Právě poslední uvedené číslo je první, který je dělitelný 36. Nejmenší pětímístný palindrom dělitelný 36 je 21312.

Z6–I–4

Šárka s Lubošem společně zasadili 70 tulipánů různých barev. Šárka nesázela žluté tulipány a pět devítin těch, které zasadila, byly červené. Luboš nesázel červené tulipány a dvě sedmnáctiny těch, které zasadil, byly žluté.

Kolik zasazených tulipánů mělo jinou barvu než červenou či žlutou? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Počet tulipánů, které zasadila Šárka, byl násobkem 9, počet těch, které zasadil Luboš, byl násobkem 17 a společně jich zasadili 70. Pro násobky 17 nepřevyšující 70 vyjádříme rozdíl od 70 a ověříme dělitelnost devíti:

Luboš	17	34	51	68
Šárka	53	36	19	2
děl. 9	ne	ano	ne	ne

Luboš zasadil 34 tulipánů, Šárka jich zasadila 36.

Červené tulipány sázela Šárka a bylo jich $\frac{5}{9} \cdot 36 = 20$. Žluté tulipány sázel Luboš a bylo jich $\frac{2}{17} \cdot 34 = 4$. Jinou barvu než červenou či žlutou mělo $70 - 20 - 4 = 46$ tulipánů.

Z6–I–5

Tři kamarádky se po letech sešly a sdělovaly si, kde která z nich bydlí:

První: „Já bydlím v Hradci Králové.“

Druhá: „Já nebydlím v Opavě.“

Třetí druhé: „Ty nebydlíš ani v Jihlavě.“

Kamarádky opravdu bydlí ve zmiňovaných městech, každá v jiném. Jedna z kamarádek neřekla ostatním pravdu a nebyla to ta z Opavy.

Rozhodněte, kde která z kamarádek bydlí. (M. Petrová)

Možné řešení. Postupně prověříme tři případy podle toho, která z kamarádek nemluvila pravdu.

Předpokládejme, že lhala první (a druhá a třetí mluvily pravdu):

- První nemůže bydlet v Opavě (protože ta z Opavy nelže), ani v Hradci (protože pak by mluvila pravdu). Tedy první bydlí v Jihlavě.
- Druhá nebydlí v Opavě (protože mluvila pravdu), ani v Jihlavě (protože tam bydlí první). Tedy druhá bydlí v Hradci.
- Na třetí zbývá Opava, což není s ničím v rozporu (jako pravdomluvná tam bydlet může a její výrok souhlasí s předchozím závěrem o druhé kamarádce).

Předpokládejme, že lhala druhá:

- Druhá má bydlet v Opavě (protože její výrok není pravdivý) a současně tam bydlet nemůže (protože ta z Opavy nelže). To je rozporuplná situace.

Předpokládejme, že lhala třetí (a první a druhá mluvily pravdu):

- První bydlí v Hradci (protože mluvila pravdu).
- Druhá nebydlí v Opavě (protože mluvila pravdu), ani v Hradci (protože tam bydlí první). Tedy druhá bydlí v Jihlavě.
- Na třetí zbývá Opava, což je v rozporu s tím, že ta z Opavy nelže.

Pouze první případ nevedl k žádnému rozporu. Tedy první kamarádka bydlí v Jihlavě, druhá v Hradci Králové a třetí v Opavě.

Z6–I–6

Ve čtvercové síti bydlí tři kruhy a tři trojúhelníky, každý v jiném poli. Každý tvar má alespoň jednoho souseda, přičemž sousedé obývají pole se společnou stranou. Obydlená pole tvoří souvislou oblast, tedy od každého ke každému se lze dostat přes sousedy. Každou noc se každý tvar může změnit podle toho, jak přes den vypadali jeho sousedé:

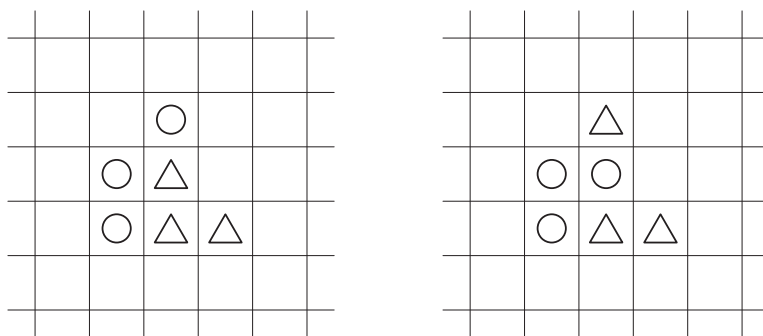
- pokud je tvar kruhem a mezi jeho sousedy bylo víc trojúhelníků než kruhů, tak se tvar změní na trojúhelník,
- pokud je tvar trojúhelníkem a mezi jeho sousedy bylo víc kruhů než trojúhelníků, tak se tvar změní na kruh,
- v ostatních případech se tvar nezmění.

Příklad obydlené čtvercové sítě a proměny po jedné noci je na obrázku níže.

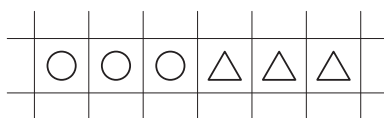
- a) Rozmístěte tvary tak, aby se v noci neměnily.
- b) Rozmístěte tvary tak, aby se každý tvar každou noc změnil.

c) Rozmístěte tvary tak, aby po několika nocích byly všechny tvary stejné.

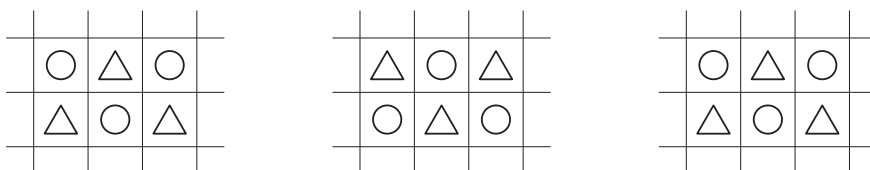
(I. Jančígová)



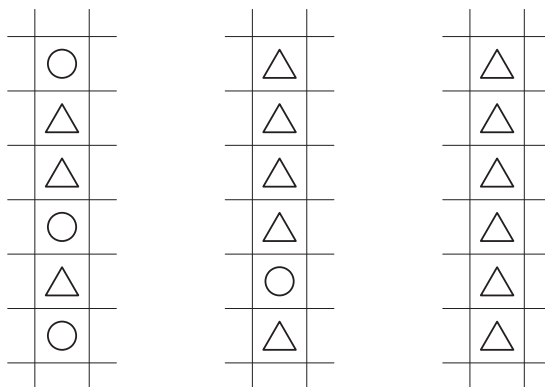
Možné řešení. a) Aby se žádné tvary neměnily, nemůže mít žádný kruh víc sousedů trojúhelníků a naopak. Rozmístění tvarů může vypadat takto:



b) Aby se všechny tvary měnily, musí mít každý kruh víc sousedů trojúhelníků a naopak. Rozmístění tvarů a následné změny mohou vypadat takto:



c) Aby se změny po čase ustálily, potřebujeme víc měnících se kruhů než trojúhelníků (či naopak). Rozmístění tvarů a následné změny mohou vypadat takto:



Poznámka. Systémy založené na podobných pravidlech mají zajímavé souvislosti a aplikace, viz např. [Hru života](#).