74. ročník Matematické olympiády (2024/2025)

Ústřední kolo kategorie A

Plzeň, 17. března 2025

1. Pro reálná čísla a, b, c, d platí

$$a + b + c + d = 0 \qquad \text{a} \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0.$$

Kolik z rovností

$$ab = cd, \qquad ac = bd, \qquad ad = bc$$

může současně platit? Určete všechny takové počty.

2. Najděte největší celé číslo n s následující vlastností: Kdykoliv je v rovině dáno pět navzájem různých bodů tak, že některé dva z nich leží uvnitř trojúhelníku tvořeného zbylými třemi body, pak lze některé tři z těchto pěti bodů označit X, Y, Z tak, že platí $n° < |\sphericalangle XYZ| \leqq 180°$.

3. Nechť $n > 1$ je přirozené číslo a p jeho největší prvočinitel. Pro každou neprázdnou podmnožinu dělitelů čísla n napíšeme na tabuli součet jejích prvků. Předpokládejme, že jsme takto napsali více než p čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, p + 2\}$ a žádné číslo z této množiny jsme nenapsali vícekrát. Dokažte, že pak jsme žádné číslo nenapsali vícekrát.

Soutěžící má na vypracování úloh 4,5 hodiny čistého času; případné dotazy k textu zadání mohou být zodpovězeny v prvních 20 minutách. Za každou úlohu může soutěžící získat 7 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby. Knihy, kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou.

74. ročník Matematické olympiády (2024/2025)

Ústřední kolo kategorie A

Plzeň, 18. března 2025

4. Podél kružnice je napsáno několik (alespoň tři) navzájem různých prvočísel. Pro každá dvě sousední prvočísla určíme největší prvočinitel jejich součtu. Takto získáme až na pořadí opět stejná prvočísla, jako byla ta napsaná. Najděte všechny možné výchozí množiny prvočísel.
(Například prvočísla $2, 7, 3, 11, 17$ v tomto pořadí nevyhovují, protože odpovídající součty $9, 10, 14, 28, 19$ mají největší prvočinitele $3, 5, 7, 7, 19$.)

5. Najděte všechna kladná celá čísla n s následující vlastností: Ve čtvercové tabulce $n \times n$ lze vybarvit $2n$ polí tak, že žádná dvě z nich nesousedí stranou ani vrcholem a v každém řádku i každém sloupci jsou vybarvená právě dvě pole.

6. V daném ostroúhlém trojúhelníku ABC označme H průsečík výšek, ω kružnici opsanou a O její střed. Dále označme M střed strany BC a $D \neq A$ průsečík přímky AH s kružnicí ω. Přímka DM protne kružnici ω v bodě $E \neq D$. Nechť $F \neq E$ je průsečík přímky AE s kružnicí opsanou trojúhelníku OME. Dokažte, že platí $|FH| = |FA|$.

Soutěžící má na vypracování úloh 4,5 hodiny čistého času; případné dotazy k textu zadání mohou být zodpovězeny v prvních 20 minutách. Za každou úlohu může soutěžící získat 7 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby. Knihy, kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou.

1. *Pro reálná čísla a, b, c, d platí*

$$a+b+c+d=0 \qquad a \qquad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=0.$$

Kolik z rovností

$$ab=cd, \qquad ac=bd, \qquad ad=bc$$

může současně platit? Určete všechny takové počty. (Michal Janík)

Řešení. Ukážeme, že vždy platí buď dvě, nebo tři z rovností. Obě tyto možnosti mohou skutečně nastat:

(i) dvě rovnosti platí například pro $(a,b,c,d)=(t,-t,u,-u)$, kde $t\neq u$ jsou libovolná různá kladná reálná čísla. Tehdy totiž máme $ab=-t^2\neq -u^2=cd$, $ac=tu=bd$ a $ad=-tu=bc$. (Ze symetrie platí právě dvě rovnosti i pro libovolnou permutaci čtveřice $(t,-t,u,-u)$.)

(ii) všechny tři zadané rovnosti platí pro obdobné čtveřice, kde $t=u$, tj. pro čtveřice $(a,b,c,d)=(t,-t,t,-t)$, kde t je libovolné nenulové reálné číslo. Tehdy totiž máme $ab=-t^2=cd$, $ac=t^2=bd$ a $ad=-t^2=bc$.

Dále dokážeme, že méně rovností platit nemůže. Všimněme si, že díky druhému vztahu jsou čísla a, b, c, d nenulová. Z prvního vztahu platí $a+b=-(c+d)$, což spolu s druhým vztahem a elementárními úpravami dává

$$\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=-\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)=\frac{-(c+d)}{cd}=\frac{a+b}{cd}.$$

Nyní rozlišíme dva případy.

a) Pokud platí $a+b=0$, pak jsou čísla a, b k sobě opačná, tedy je lze parametrizovat jako $(t,-t)$, kde $t\neq 0$. Kvůli prvnímu zadanému vztahu jsou pak i zbylá dvě čísla k sobě opačná a lze je parametrizovat jako $(u,-u)$, kde $u\neq 0$. Pokud $|t|\neq|u|$, nastává první ze dvou možností výše a platí dvě rovnosti. Pokud $|t|=|u|$, nastává ta druhá možnost a platí všechny tři rovnosti.

b) V případě $a+b\neq 0$ můžeme odvozený vztah vydělit (nenulovým) součtem $a+b$ a po úpravě dostaneme rovnost $ab=cd$. Analogicky použitím vztahů $a+c=-(b+d)$ a $a+d=-(b+c)$ ukážeme, že pokud žádná dvě čísla nejsou opačná, pak platí i rovnosti $ac=bd$ a $ad=bc$. V tomto případě tedy platí všechny tři rovnosti.

Poznámka. Níže naznačíme dva další způsoby jak dokázat, že některá dvě z čísel a, b, c, d jsou k sobě opačná. Řešení lze pak dokončit jako v případě a) prvního řešení.

Jiné řešení. Z prvního zadaného vztahu vyjádříme $d=-(a+b+c)$ a dosadíme do druhého vztahu, čímž dostaneme

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a+b+c}=0.$$

Vynásobením nenulovým výrazem $abc(a+b+c)$ odstraníme zlomky a získáme

$$bc(a+b+c)+ac(a+b+c)+ab(a+b+c)-abc=0,$$

což můžeme dále upravit na

$$b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2 + a^2b + ab^2 + 2abc = 0.$$

Roznásobením lze snadno ověřit, že platí

$$(a + b)(b + c)(c + a) = b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2 + a^2b + ab^2 + 2abc = 0,$$

takže některá dvě z čísel a, b, c jsou k sobě opačná.

Jiné řešení. Vynásobením druhého zadaného vztahu (nenulovým) výrazem $abcd$ získáme $abc+bcd+cda+dab = 0$. Označme ještě $p = abcd$ a $q = ab+ac+ad+bc+bd+cd$ další dva symetrické mnohočleny v proměnných a, b, c, d a uvažme polynom

$$P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$$

s kořeny a, b, c, d. Roznásobením závorek na pravé straně (resp. užitím Viètových vztahů) dostaneme

$$P(x) = x^4 - (a + b + c + d)x^3 + q \cdot x^2 - (abc + bcd + cda + dab)x + p = x^4 + qx^2 + p,$$

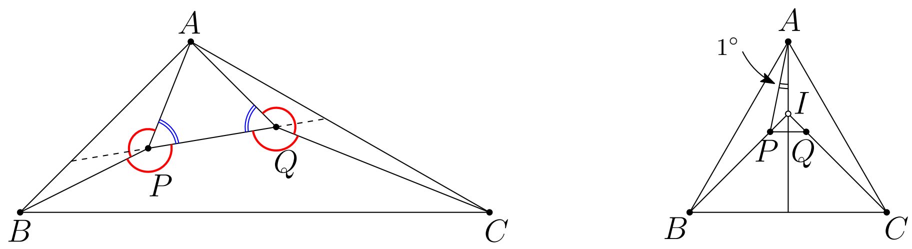
takže polynom $P(x)$ je sudá funkce. Jelikož $P(x)$ má kořen a, musí mít i kořen $-a$. Z $a \neq 0$ plyne, že $-a \in \{b, c, d\}$, takže některá dvě z čísel a, b, c, d jsou k sobě opačná.

2. *Najděte největší celé číslo n s následující vlastností: Kdykoliv je v rovině dáno pět navzájem různých bodů tak, že některé dva z nich leží uvnitř trojúhelníku tvořeného zbylými třemi body, pak lze některé tři z těchto pěti bodů označit X, Y, Z tak, že platí $n^\circ < |\sphericalangle XYZ| \leqq 180^\circ$.* (Josef Tkadlec)

Řešení. Ukážeme, že odpověď je $n = 135$.

Nejdřív dokážeme, že vždy existuje konvexní úhel o velikosti větší než 135°. Označme daných pět bodů písmeny A, B, C, P, Q tak, aby dva body P, Q ležely uvnitř trojúhelníku ABC.

Uvažme přímku PQ. Pokud prochází jedním z vrcholů A, B, C, pak máme trojici X, Y, Z splňující $|\sphericalangle XYZ| = 180^\circ$. Předpokládejme tedy, že přímka PQ protíná dvě strany trojúhelníku ABC ve vnitřních bodech. Bez újmy na obecnosti nechť jsou to strany AB, AC, přičemž body P, Q leží na přímce v pořadí jako na obrázku vlevo (tj. průsečík přímky PQ s AB je blíže k P než ke Q). Pak lze trojúhelník ABC rozdělit na konvexní čtyřúhelník $BPQC$ a trojúhelníky ABP, APQ, AQC.



Součet velikostí čtyř vyznačených červených (jednoproužkových) úhlů a dvou modrých (dvouproužkových) úhlů u vrcholů P, Q je $2 \cdot 360^\circ = 720^\circ$. Přitom součet velikostí modrých úhlů je menší než 180°, neboť jsou to vnitřní úhly v trojúhelníku APQ. Takže součet velikostí čtyř červených úhlů je větší než $720^\circ - 180^\circ = 540^\circ$, a tedy aspoň jeden z nich je větší než $540^\circ/4 = 135^\circ$, jak jsme chtěli dokázat.

Ve druhé části řešení popíšeme pětici bodů, ve které má každý konvexní úhel velikost nejvýše 136°.

Uvažme rovnostranný trojúhelník ABC a uvnitř něj bod I takový, že $|BI| = |CI|$ a $|\sphericalangle BIC| = 90^\circ$. Na úsečkách BI, CI zvolme po řadě body P, Q tak, že $|IP| = |IQ|$ a $|\sphericalangle PAI| = 1^\circ$. Tvrdíme, že pětice bodů A, B, C, P, Q má požadovanou vlastnost. K tomu nám poslouží tři pozorování:

(i) Platí $|\sphericalangle BPQ| = 135^\circ$, protože trojúhelník IPQ je rovnoramenný a pravoúhlý.

(ii) Platí $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle AIP| + |\sphericalangle PAI| = 135^\circ + 1^\circ = 136^\circ$.

(iii) Platí $|\sphericalangle IPC| < 90^\circ$, protože trojúhelník IPC má pravý úhel u vrcholu I.

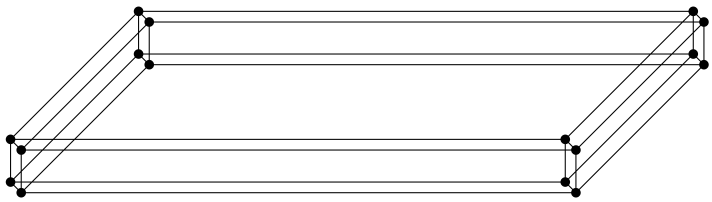
Uvažme libovolný konvexní úhel XYZ na pěti bodech A, B, C, P, Q. Rozlišíme případy podle toho, ve kterém bodě je jeho vrchol Y.

- Pokud $Y = A$, pak $|\sphericalangle XYZ| \leqq |\sphericalangle BAC| = 60^\circ$, jelikož trojúhelník ABC je rovnostranný. Stejně zdůvodníme i případy $Y = B$ a $Y = C$.
- Pokud $Y = P$, pak:
  - Pro $X, Z \in \{B, C, Q\}$ podle pozorování (i) platí $|\sphericalangle XYZ| \leqq |\sphericalangle BPQ| = 135^\circ$.

  - V opačném případě bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $X = A$. Pak podle pozorování (ii) máme $|\sphericalangle APB| = 136°$. A podle pozorování (iii) máme $|\sphericalangle APQ| < |\sphericalangle APC| = |\sphericalangle API| + |\sphericalangle IPC| < 44° + 90° = 134°$.
- Případ $Y = Q$ zdůvodníme stejně jako případ $Y = P$.

Poznámka. Tvrzení úlohy souvisí s následující otázkou: Pro dané $n \geqq 3$ a daný úhel α rozhodněte, zda každá množina n bodů v rovině obsahuje tři body, které určují (konvexní) úhel velikosti alespoň α.

V roce 1941 dokázal *G. Szekeres** následující tvrzení: Kdykoliv $n = 2^k$, kde $k \geqq 2$, pak v rovině existuje množina n bodů takových, že všechny konvexní úhly jimi určené mají velikost nejvýše $(1 - 1/k) \cdot 180° + \varepsilon°$, kde ε je libovolně malé kladné číslo. Speciálně pro $k = 4$ tedy existuje množina $2^4 = 16$ bodů roviny, ve které každé tři body určují konvexní úhel velikosti nejvýše 135,01°. Idea konstrukce je naznačena na obrázku.



V roce 1960 pak *P. Erdős* a *G. Szekeres* společně dokázali** následující tvrzení: Kdykoliv $n = 2^k$, kde $k \geqq 3$, pak každá množina n bodů v rovině určuje konvexní úhel velikosti alespoň $(1 - 1/k) \cdot 180°$. Speciálně tedy každá množina $16 = 2^4$ bodů roviny určuje úhel velikosti alespoň $(1 - 1/4) \cdot 180° = 135°$.

Pro obecný počet bodů n je tato otázka stále otevřená.

* Jde o Theorem 1 v článku On an Extremum Problem in the Plane
https://www.jstor.org/stable/pdf/2371290.pdf.

** Jde o Theorem 1 v článku On Some Extremum Problems in Elementary Geometry
https://combinatorica.hu/~p_erdos/1960-09.pdf.

3. *Nechť $n > 1$ je přirozené číslo a p jeho největší prvočinitel. Pro každou neprázdnou podmnožinu dělitelů čísla n napíšeme na tabuli součet jejích prvků. Předpokládejme, že jsme takto napsali více než p čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, p+2\}$ a žádné číslo z této množiny jsme nenapsali vícekrát. Dokažte, že pak jsme žádné číslo nenapsali vícekrát.*

(Zdeněk Pezlar)

Řešení. Ukážeme, že podmínkám úlohy vyhovují jen čísla tvaru $n = 2^k$ pro $k \geqq 1$ a dále ta čísla tvaru $n = 2^k \cdot (2^{k+1} + 1)^\ell$, kde $2^{k+1} + 1$ je prvočíslo (tzv. Fermatovo prvočíslo) pro $k, \ell \geqq 1$. Přitom ověříme, že pro každé takové číslo n platí požadovaný závěr.

Předpokládejme, že dané číslo n vyhovuje podmínkám úlohy. Potom všechna čísla $\{1, 2, \ldots, p+2\}$ až na nejvýše jedno jsou na tabuli napsána právě jednou. Označme $D(n)$ množinu dělitelů čísla n. Zřejmě platí $1 \in D(n)$.

Nejdříve ukážeme, že n je sudé. Sporem předpokládejme, že n je liché, tedy že platí $2 \notin D(n)$ a $p \geqq 3$. Kdyby platilo $3 \notin D(n)$, pak by na tabuli chyběla čísla 2 a 3, což odporuje podmínkám úlohy. Takže platí $\{1, 3\} \subseteq D(n)$ a na tabuli se objeví čísla 1, 3 a $1 + 3 = 4$ (naopak číslo 2 na tabuli jistě chybí). Podobně kdyby platilo $5 \notin D(n)$, pak by na tabuli chyběla čísla 2 a $5 \leqq p + 2$, což nelze. Takže $\{1, 3, 5\} \subseteq D(n)$ a $p \geqq 5$. Myšlenku zopakujeme ještě do třetice: kdyby platilo $7 \notin D(n)$, pak by na tabuli chyběla čísla 2 a $7 \leqq p + 2$, což nelze. Takže $\{1, 3, 5, 7\} \subseteq D(n)$ a $p \geqq 7$. Ale to je hledaný spor, protože součet $8 \leqq p + 2$ se pak na tabuli objeví vícekrát, a to jako $1 + 7 = 3 + 5$.

V dalším textu předpokládejme, že n je sudé. Označme $k \geqq 1$ největší přirozené číslo, pro které je 2^k dělitelem n (tedy $2^k \mid n$, ale $2^{k+1} \nmid n$).

Pokud $n = 2^k$, pak $p = 2$ a $D(n) = \{2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^k\}$. Díky jednoznačnosti zápisu ve dvojkové soustavě jsou součty různých podmnožin množiny $D(n)$ právě všechna různá čísla od 1 po $2^{k+1} - 1$. Platí tedy požadovaný závěr (a díky nerovnosti $2^{k+1} \geqq 2 + 2$ platí pro každé $k \geqq 1$ i podmínky úlohy).

Dále předpokládejme, že n je dělitelné i nějakým lichým prvočíslem a označme q to nejmenší z nich. Pak nutně platí $q \leqq p < p + 2$. Ukážeme, že platí $q = 2^{k+1} + 1$. K tomu rozlišíme tři případy:

(i) Kdyby platilo $q \leqq 2^{k+1} - 1$, pak by se na tabuli zopakovalo číslo q: jednou jako součet vhodných mocnin dvojek, jednou jako součet jednoprvkové množiny $\{q\}$. To nelze.

(ii) Jistě platí $q \neq 2^{k+1}$, protože q je liché, zatímco pravá strana je sudá.

(iii) Kdyby platilo $q \geqq 2^{k+1} + 2$, pak by na tabuli chyběla 2^{k+1} a $2^{k+1} + 1 \leqq p + 2$. To také nelze.

Pokud tedy n obsahuje ve svém rozkladu nějaká lichá prvočísla, pak to nejmenší z nich splňuje $q = 2^{k+1} + 1$. Tehdy se díky podmnožinám dělitelů čísla 2^k na tabuli objeví právě jednou každé z čísel od 1 po $2^{k+1} - 1$. Následně chybí číslo 2^{k+1} a objeví se číslo $2^{k+1} + 1 = q$. A následně přičtením q k součtům všech podmnožin dělitelů čísla 2^k vyjádříme právě jednou každé z čísel v rozmezí od $q = 2^{k+1} + 1$ po $q + (2^{k+1} - 1) = 2^{k+2}$. Tím jsme zohlednili součty všech podmnožin množiny $\{2^0, 2^1, \ldots, 2^k, q\}$ dělitelů čísla n.

Dále ukážeme, že číslo n nemůže ve svém rozkladu kromě $q = 2^{k+1} + 1$ obsahovat už žádné jiné liché prvočíslo různé od q. Sporem předpokládejme opak a označme $r > q$ nejmenšího lichého prvočinitele většího než q. Opět rozlišíme tři případy:

(i) Případ $r \leqq 2^{k+2}$. Pak se na tabuli zopakuje číslo r, což nelze.

(ii) Případ $r = 2^{k+2} + 1$. Pak se na tabuli zopakuje číslo $2^{k+2} + 2 = r + 1 \leqq p + 2$: Je to totiž jednak součet dělitelů r a 1, jednak přímo dělitel $2q$ (n je sudé).

(iii) Případ $r \geqq 2^{k+2} + 2$. Tvrdíme, že pak kromě čísla 2^{k+1} na tabuli chybí i číslo $2^{k+2} + 1 = 2q - 1$: to je totiž větší než součet libovolné podmnožiny dělitelů $\{2^0, 2^1, \dots, 2^k, q\}$ a současně je menší než libovolný jiný dělitel čísla n. Jelikož $2q - 1 < r < p + 2$, tento případ odporuje podmínkám úlohy.

K dokončení řešení tedy zbývá uvážit čísla n tvaru $n = 2^k \cdot q^\ell$, kde $q = 2^{k+1} + 1$ je prvočíslo a $\ell \geqq 1$. Každé takové n jistě splňuje podmínky úlohy, neboť z čísel $\{1, 2, \dots, p + 2 = q + 2\}$ na tabuli chybí jediné číslo, a to $2^{k+1} = q - 1$. Dokážeme, že každé takové n splňuje i závěr úlohy. Využijeme k tomu jednoznačnost zápisu ve dvojkové soustavě a v soustavě o základu q.

Nejprve si uvědomme, že všichni dělitelé n jsou tvaru $2^i q^j$. Sečteme-li všechny dělitele s pevným j, dostaneme

$$q^j + 2q^j + \ldots + 2^k q^j = (2^{k+1} - 1)q^j = (q - 2)q^j,$$

což je menší než q^{j+1}. Součet jen některých z těchto dělitelů je proto tvaru $c_j \cdot q^j$, kde $c_j \in \{0, 1, \dots, q - 2\}$. Uvážíme-li tedy libovolné číslo na tabuli a jeho zápis v soustavě o základu q, musí příspěvek u mocniny q^j vzniknout jako součet některých z dělitelů s q^j v prvočíselném rozkladu. Z koeficientu u q^j, který je nanejvýš $q - 2$, pak díky jednoznačnosti zápisu ve dvojkové soustavě už jednoznačně plyne, které z dělitelů $q^j, 2q^j, \dots, 2^k q^j$ se v součtu vyskytly. Celkem tak k číslu napsanému na tabuli může příslušet jen jediná podmnožina množiny dělitelů $D(n)$, jak jsme chtěli ukázat.

POZNÁMKA. Z výše uvedeného řešení vyplývá, že:

(i) Pro $n = 2^k$ se na tabuli objeví čísla $1, 2, \dots, 2^{k+1} - 1$.

(ii) Pro $n = 2^k \cdot q^\ell$, kde $q = 2^{k+1} + 1$ je prvočíslo a $k, \ell \geqq 1$, se na tabuli objeví právě ta čísla, která jsou při vyjádření v soustavě o základu q nejvýše $(\ell + 1)$-místná a nikde neobsahují „číslici“ $q - 1$.

4. *Podél kružnice je napsáno několik (alespoň tři) navzájem různých prvočísel. Pro každá dvě sousední prvočísla určíme největší prvočinitel jejich součtu. Takto získáme až na pořadí opět stejná prvočísla, jako byla ta napsaná. Najděte všechny možné výchozí množiny prvočísel.*
(Například prvočísla $2, 7, 3, 11, 17$ *v tomto pořadí nevyhovují, protože odpovídající součty* $9, 10, 14, 28, 19$ *mají největší prvočinitele* $3, 5, 7, 7, 19$*.)* (Michal Janík)

Řešení. Ukážeme, že jediná taková množina je $\{2, 3, 5, 7\}$.

Uvažme libovolnou vyhovující množinu M prvočísel a označme p největší z nich. Jelikož jsou v M alespoň tři prvočísla, platí $p \geqq 5$. Podle zadání je součet některých dvou různých prvočísel z M násobkem p. Součet libovolných dvou různých prvočísel z M je ale menší než $p + p = 2p$ (a je kladný), takže tento součet musí být roven právě p. Jelikož p je liché, musí být jedno ze sčítaných prvočísel sudé, tedy musí být rovno dvěma, a to druhé musí být proto rovno $p - 2$. Tedy $2 \in M$ a $p - 2 \in M$. Všimněme si také, že $p - 2$ je druhým největším číslem v M; číslo $p - 1 \geqq 4$ je totiž sudé a větší než 2, takže není prvočíslem z M.

I prvočíslo $p - 2$ musí být největším prvočinitelem součtu některých dvou různých prvočísel z M. Největší možný součet dvou různých čísel z M je $p + (p - 2) = 2p - 2 < < 3(p - 2)$, kde poslední nerovnost je ekvivalentní s $p > 4$. Takže tento součet musí být roven buď $2(p - 2)$ nebo $p - 2$. Ukážeme, že v obou případech platí $p - 4 \in M$.

(i) Uvažme první případ, kdy součet je roven $2(p - 2)$. Sčítance nemohou být stejné, takže ten větší z nich musí být větší než $p - 2$. Jediné takové číslo v M je p, takže druhý sčítanec musí být $2(p - 2) - p = p - 4$.

(ii) Ve druhém případě, kdy součet je roven $p - 2$, postupujeme stejně jako v druhém odstavci řešení: Prvočíslo $p - 2 \geqq 3$ je liché, tedy jeden ze sčítanců je 2 a druhý je $(p - 2) - 2 = p - 4$.

Ukázali jsme, že množina M obsahuje prvočísla p, $p - 2$ a $p - 4$. Jediná tři po sobě jdoucí lichá prvočísla jsou 3, 5 a 7 (jedno z nich totiž musí být dělitelné třemi). Víme také, že $2 \in M$ a jelikož $p = 7$ je podle předpokladu největší prvočíslo v M, jiná prvočísla M obsahovat nemůže.

Zbývá rozhodnout, zda množina $\{2, 3, 5, 7\}$ vyhovuje zadání. Pokud čísla napíšeme podél kružnice v pořadí 2, 5, 3, 7, dostaneme postupně součty 7, 8, 10, 9 s největšími prvočíselnými děliteli postupně 7, 2, 5, 3. Takže množina $\{2, 3, 5, 7\}$ opravdu vyhovuje.

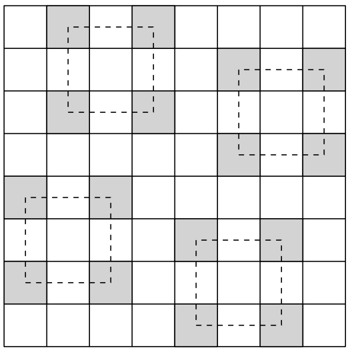
5. *Najděte všechna kladná celá čísla n s následující vlastností: Ve čtvercové tabulce $n \times n$ lze vybarvit $2n$ polí tak, že žádná dvě z nich nesousedí stranou ani vrcholem a v každém řádku i každém sloupci jsou vybarvená právě dvě pole.* (Jakub Štepo)

Řešení. Dokážeme, že vyhovují právě všechna $n \geqq 8$.

Nejdřív dokážeme, že žádné $n \leqq 7$ nevyhovuje. Zřejmě $n = 1$ nevyhovuje, pro $n \geqq 2$ se zaměřme na dolní dva řádky tabulky. V těch jsou dohromady 4 vybarvená pole, přitom ale žádná dvě vybarvená pole nemohou být ve stejném sloupci ani v sousedních sloupcích. Mezi čtyřmi obsazenými sloupci tak musejí být alespoň tři neobsazené, takže celkový počet sloupců je alespoň $4 + 3 = 7$.

Navíc pokud by sloupců bylo přesně 7 (tj. $n = 7$), muselo by být po jednom vybarveném poli právě v prvním, třetím, pátém a sedmém sloupci zleva. Speciálně tedy v jednom z dolních dvou řádků musí být vybarvené první pole. Zopakováním stejného argumentu pro následující dva řádky (třetí a čtvrtý zdola) a následující dva řádky (pátý a šestý zdola) zjistíme, že v alespoň třech řádcích musí být vybarvené první pole, což ovšem nelze.

Zbývá dokázat, že pro každé $n \geqq 8$ lze pole požadovaným způsobem vybarvit. Řešení případu $n = 8$ je na obrázku 1 (lze dokázat, že je až na zrcadlení jediné).



$n = 8$

Obr. 1

Dále nechť $n \geqq 9$. Pole v x-tém sloupci zleva a y-tém řádku zdola značme (x, y). Uvažme nejdřív tabulku T na obrázku 2 vlevo, kde obarvená pole jsou právě ta se souřadnicemi (i, i) a $(i, (i+2) \bmod n)$ pro $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Zřejmě každý řádek i sloupec obsahují právě dvě obarvená pole, ale některá obarvená pole sousedí. Z tabulky T nyní vyrobíme vyhovující tabulku T' tak, že sloupce T vhodně přeskládáme. Po libovolném přeskládání sloupců bude zřejmě platit, že každý řádek i sloupec obsahují právě dvě obarvená pole, takže stačí zajistit, aby žádná dvě obarvená pole nesousedila.

Rozlišíme dva případy podle toho, jestli n je liché nebo sudé.

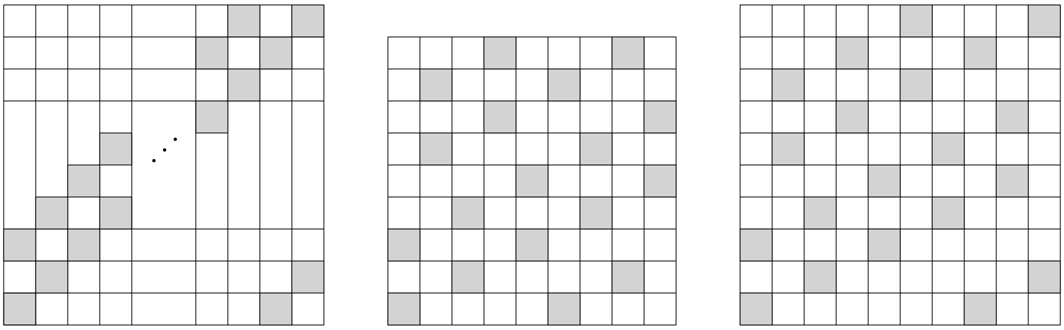
(i) Případ $n = 2k - 1$ pro $k \geqq 5$: Sloupce přeskládáme v pořadí

$$1,\ k+1,\ 2,\ k+2,\ \ldots,\ k-1,\ 2k-1,\ k$$

jako na obrázku 2 uprostřed.

(ii) Případ $n = 2k$ pro $k \geqq 5$: Sloupce podobně přeskládáme v pořadí

$$1,\ k+1,\ 2,\ k+2,\ \ldots,\ k-1,\ 2k-1,\ k,\ 2k$$



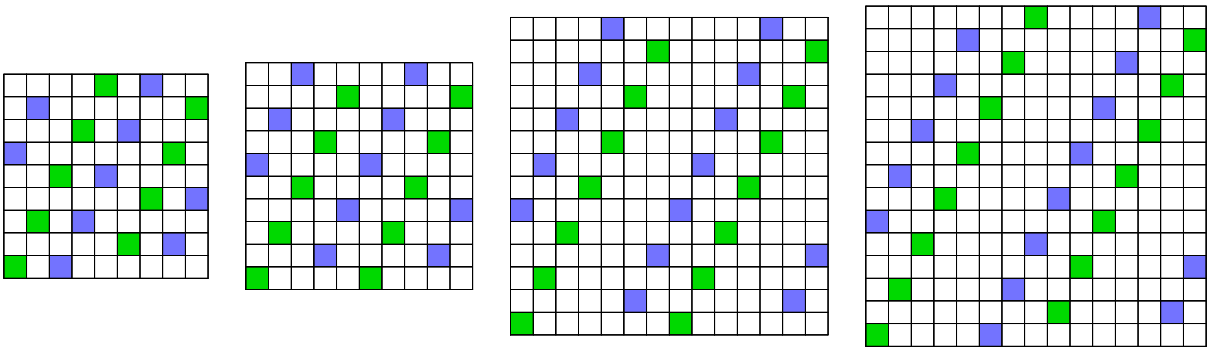
T $\quad$ T' pro $n = 9$ $\quad$ T' pro $n = 10$

Obr. 2

jako na obrázku 2 vpravo.

V obou případech platí, že modulo n se čísla každých dvou sousedních sloupců liší alespoň o $k - 1$, takže čísla řádků, ve kterých mají tyto dva sousední sloupce obarvená pole, se liší alespoň o $(k-1)-2$. Jelikož $k \geqq 5$, platí $(k-1)-2 \geqq 2$, takže žádná dvojice sousedních sloupců neobsahuje obarvená pole v sousedních řádcích.

Poznámka. Možných konstrukcí pro $n \geqq 9$ je více a lze je popsat více způsoby. Například lze dokázat, že vyhovuje vybarvení políček tvaru $A_k = (k, 2k \bmod n)$ a $B_k = (k, 2k+5 \bmod n)$, kde řádky (odspodu) a sloupce (zleva) číslujeme od 0 po $n-1$ a číslo k probíhá hodnoty $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, viz obr. 3. Pole A_k (zelená) v sousedních sloupcích nesousedí, jelikož se jejich y-ové souřadnice liší alespoň o 2. Podobně pole B_k (modrá). Pole B_k a A_{k+1} nesousedí, jelikož jejich y-ové souřadnice se liší (mod n) právě o 3, podobně se y-ové souřadnice polí A_k a B_{k+1} liší o $n - 7 \geqq 2$. Vyznačená pole tak nesousedí. A zřejmě v případě sudého n se pole A_k objeví dvakrát v každém sudém řádku a B_k dvakrát v každém lichém řádku. V případě lichého n se zřejmě v každém řádku objeví jedno pole A_k a jedno pole B_k.

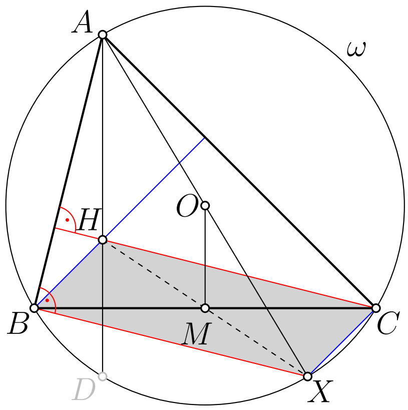


Uvedené obarvení pro n po řadě 9, 10, 14, 15.

Obr. 3

6. *V daném ostroúhlém trojúhelníku ABC označme H průsečík výšek, ω kružnici opsanou a O její střed. Dále označme M střed strany BC a $D \neq A$ průsečík přímky AH s kružnicí ω. Přímka DM protne kružnici ω v bodě $E \neq D$. Nechť $F \neq E$ je průsečík přímky AE s kružnicí opsanou trojúhelníku OME. Dokažte, že platí $|FH| = |FA|$.*
(Michal Pecho)

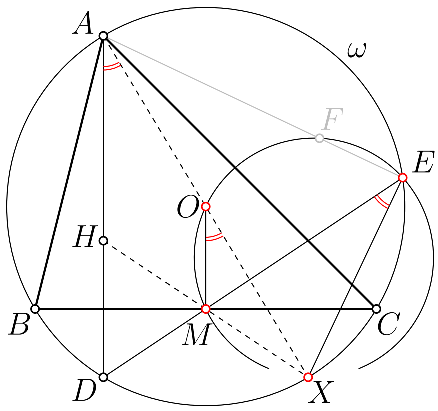
Řešení. Označme $X \neq A$ průsečík přímky AO a kružnice ω, tedy bod „naproti“ A na kružnici ω. Je známo, že čtyřúhelník $BXCH$ je rovnoběžník – přímky BX a CH jsou totiž obě kolmé na AB, a tedy rovnoběžné, a podobně jsou rovnoběžné i přímky BH a CX. Bod M jakožto střed jeho úhlopříčky BC je tedy i středem jeho druhé úhlopříčky HX.

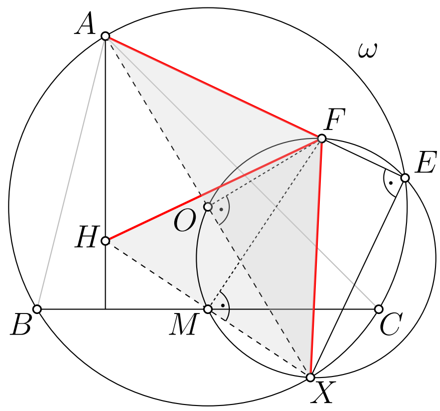


Dále dopočítáním úhlů ukážeme, že bod X leží i na kružnici opsané trojúhelníku OME (viz obrázek vlevo). Jelikož O leží na ose strany BC, máme $OM \perp BC$, takže OM je rovnoběžná s AD. To spolu s rovností obvodových úhlů příslušných oblouku DX na kružnici ω dává

$$|\sphericalangle MOX| = |\sphericalangle DAX| = |\sphericalangle DEX| = |\sphericalangle MEX|,$$

takže čtyřúhelník $MOEX$ je tětivový, jak jsme avizovali.

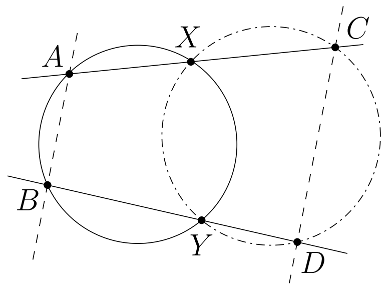




Zbytek je opět dopočítávání úhlů (viz obrázek vpravo). Jelikož platí $|\sphericalangle FEX| = |\sphericalangle AEX| = 90°$, úsečka FX je průměrem kružnice opsané trojúhelníku OME. Proto platí $|\sphericalangle FOX| = 90°$, tedy FO je kolmice na úsečku AX procházející jejím středem O. Spojnice FO je proto osou úsečky AX, takže platí $|FA| = |FX|$. Podobně platí i $|\sphericalangle FMX| = 90°$, takže FM je osou úsečky XH a platí $|FX| = |FH|$. Dohromady tak dostáváme požadované $|FA| = |FX| = |FH|$.

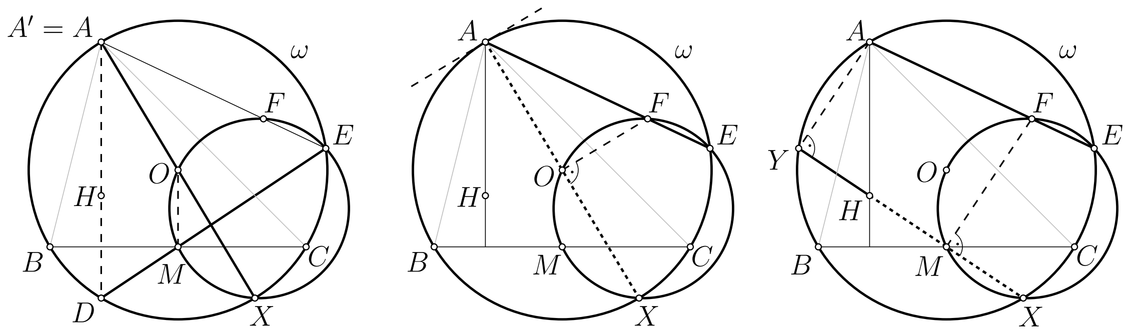
Poznámka. Pro zajímavost uveďme, že všechny kroky vzorového řešení, ve kterých se počítalo s velikostmi úhlů, jsou speciálními případy následujícího lemmatu zvaného *Reimova věta**:

Nechť body A, B, Y, X leží na jedné kružnici. Na přímkách AX a BY jsou po řadě dány body C a D. Pak body C, D, Y, X leží na jedné kružnici právě tehdy, když přímky AB, CD jsou rovnoběžné.



Ve zbytku této poznámky ukážeme, jak lze Reimovu větu použít. Označme tentokrát $X \neq E$ druhý průsečík kružnice opsané trojúhelníku OME a kružnice ω. Reimovu větu použijeme třikrát pro tyto dvě kružnice, bude se měnit jen pořadí odpovídajících bodů.

Z Reimovy věty pro průsečík $A' \neq X$ přímky XO s kružnicí ω platí $A'D \parallel OM$, tedy $A' = A$ (obrázek vlevo). Další aplikací Reimovy věty je přímka AA (neboli tečna v bodě A ke kružnici ω) rovnoběžná s OF, proto je OF kolmá na AO, tedy je osou úsečky AX (obrázek uprostřed). Napotřetí Reimova věta pro průsečík $Y \neq X$ přímky XM a kružnice ω dává $FM \parallel AY \perp XY$ (obrázek vpravo), tedy FM je osou úsečky HX díky známému faktu, že M je jejím středem (dokázanému v prvním řešení). Celkem je tedy bod F stejně vzdálen od všech bodů A, X i H, z čehož již plyne dokazované tvrzení.

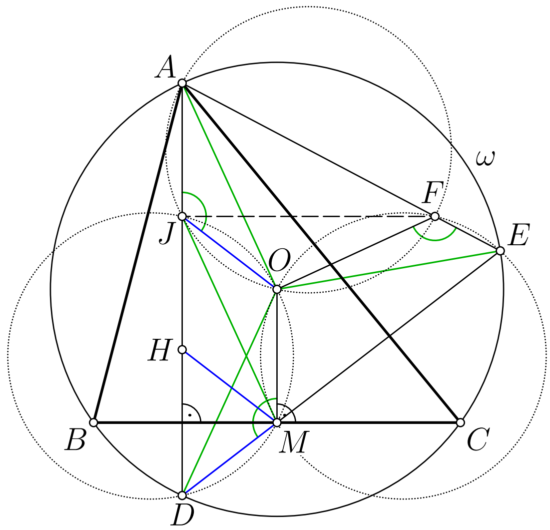


Jiné řešení. Naznačíme ještě stručně jiné řešení, které místo dokreslení bodu X dokreslí jiný bod. Předpokládejme, že body A, F, E leží na přímce v tomto pořadí (ostatní případy se zdůvodní analogicky).

Zaměřme se na trojúhelník ADE. Jelikož body O, M, E, F leží na kružnici, platí $|\sphericalangle OMD| = |\sphericalangle OFE|$. Na přímce AD dokresleme bod J tak, že $|\sphericalangle OJA| = |\sphericalangle OMD| = |\sphericalangle OFE|$. Pak čtyřúhelníky $DMOJ$ a $AJOF$ jsou oba tětivové (dokázali jsme vlastně tzv. *Miquelovu větu***). Navíc shodným úhlům $|\sphericalangle OMD|$, $|\sphericalangle OFE|$, $|\sphericalangle OJA|$ v příslušných kružnicích odpovídají shodné úsečky OD, OE, OA, takže tyto tři kružnice opsané

* Anton Reim (1832–1922) pocházel z dnešního Očihova v okrese Louny.

** https://en.wikipedia.org/wiki/Miquel’s_theorem čtyřúhelníkům $DMOJ$, $CEOM$ a $AJOF$ jsou shodné. Je známo, že díky tomu je jejich průsečík O i průsečíkem výšek trojúhelníku JFM s vrcholy ve zbylých průsečících těchto kružnic (problém tzv. *Johnsonových kružnic**). Speciálně platí $JF \perp OM$, takže z rovnoběžnosti $OM \parallel AH$ plyne, že bod J splývá s patou kolmice z bodu F k úsečce AH.



K dokončení důkazu stačí ukázat, že J je středem úsečky AH. K tomu postačí, když ukážeme, že čtyřúhelníky $JHMO$ a $AJMO$ jsou rovnoběžníky.

Jelikož $OM \parallel JD$, je tětivový čtyřúhelník $JDMO$ lichoběžníkem, takže je rovnoramenný. Zároveň je známé, že bod D je obrazem bodu H v osové souměrnosti podle přímky BC. Z toho plyne, že $JHMO$ je rovnoběžník. To, že i $AJMO$ je rovnoběžník, plyne ze shodnosti úhlopříček JM, OD rovnoramenného lichoběžníku $JDMO$ a ze shodnosti poloměrů OD, OA kružnice ω.

* https://en.wikipedia.org/wiki/Johnson_circles, jde o zobecnění populární úlohy *G. Ţiţeicy* z roku 1908 o pětileiových mincích, která se objevila i v logu 40. mezinárodní matematické olympiády.