74. ročník Matematické olympiády (2024/2025)

Úlohy školního kola kategorie C

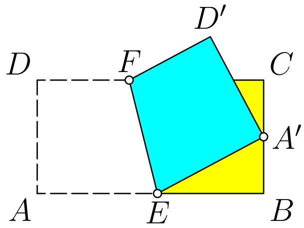
1. Čtvercovou tabulku 4×4 vybarvujeme čtyřmi různými barvami tak, aby každé pole tabulky bylo vybarveno právě jednou barvou. Rozhodněte, zda lze nalézt obarvení, v němž bude každá barva v každé z devíti menších tabulek 2×2 a také

a) v každém řádku a v každém sloupci,

b) v každém řádku.

2. Patrik napsal na tabuli dvě přirozená čísla. Všiml si, že jejich součet je prvočíslo 313, které je navíc dělitelem součtu jejich největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku. Která čísla Patrik na tabuli napsal?

3. List papíru o rozměrech 2×1 přeložíme jako na obrázku tak, že vrchol A splyne se středem A' úsečky BC. Určete obsah přeložené části, tj. čtyřúhelníku $A'D'FE$.



Školní kolo kategorie C se koná

v úterý 28. ledna 2025

tak, aby začalo nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času; případné dotazy k textu zadání mohou být zodpovězeny v prvních 20 minutách. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. *Čtvercovou tabulku 4×4 vybarvujeme čtyřmi různými barvami tak, aby každé pole tabulky bylo vybarveno právě jednou barvou. Rozhodněte, zda lze nalézt obarvení, v němž bude každá barva v každé z devíti menších tabulek 2×2 a také*

a) v každém řádku a v každém sloupci,

b) v každém řádku.

(Jaroslav Švrček)

Řešení. Ve všech řešeních budeme číslovat řádky shora a sloupce zleva. Čtverce 2×2 pro zjednodušení zápisu pojmenujeme levý horní, horní, pravý horní, levý, prostřední, pravý, levý dolní, dolní, pravý dolní. Barvy označíme pro zjednodušení zápisu písmeny A, B, C, D.

a) Ukážeme, že tabulku *nelze* vyplnit požadovaným způsobem.

Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že tabulku 4×4 lze vyplnit barvami A, B, C, D požadovaným způsobem. Uvažujme prostřední čtverec 2×2. Nechť jsou jeho čtyři políčka (bez újmy na obecnosti) vyplněna čtyřmi různými barvami A, B, C, D ve shodě s obrázkem.

	D		
D	A	B	
	C	D	

Podle zadání pak ale v druhém poli prvního řádku už nemůže být ani barva C, protože ve druhém sloupci již barvu C máme, a ani barvy A a B, protože tyto barvy jsou již obsaženy v horním čtverci 2×2. Proto v druhém poli prvního řádku musí být barva D. Z podobného důvodu musí být barva D i v prvním poli druhého řádku. To ovšem znamená, že v levém horním čtverci 2×2 je barva D *dvakrát*, což je spor.

b) Tabulku lze požadovaným způsobem obarvit, viz obrázek:

A	B	C	D
C	D	A	B
A	B	C	D
C	D	A	B

Jiné řešení části a). Začněme od horního řádku, ten obarvíme bez újmy na obecnosti barvami A, B, C, D v tomto pořadí. Pak druhý řádek už má jednoznačné obarvení po řadě C, D, A, B, protože na prvních dvou místech musí kvůli podmínce na levý horní čtverec 2×2 být barvy C, D a zároveň C nemůže být (podmínka pro horní čtverec) na druhém poli. Podobně B může být jen na posledním poli. Aplikováním stejné úvahy na třetí řádek odvodíme, že ve třetím řádku musí být barvy A, B, C, D v tomto pořadí. Pak ale bude v prvním sloupci barva A dvakrát.

A	B	C	D
C	D	A	B

A	B	C	D
C	D	A	B
A	B	C	D

Jiné řešení části a). Pokud druhé políčko druhého řádku obarvíme jednou z daných čtyř barev, označme ji bez újmy na obecnosti jako D, pak musí být tato barva v prvním řádku (dle podmínky pro levý horní a horní čtverec) jedině ve čtvrtém políčku a ve třetím řádku (dle podmínky pro levý a prostřední čtverec) také jedině ve čtvrtém políčku. To už je spor, protože ve čtvrtém sloupci bude barva D dvakrát.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Z toho 5 bodů za část a) a 1 bod za část b). Za nepřesnou nebo neúplnou argumentaci v části a) strhněte nejvýše 2 body.

2. *Patrik napsal na tabuli dvě přirozená čísla. Všiml si, že jejich součet je prvočíslo* 313*, které je navíc dělitelem součtu jejich největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku. Která čísla Patrik na tabuli napsal?* (Patrik Bak)

Řešení. Označme hledaná čísla a, b. Všimneme si nejprve, že čísla a, b jsou nesoudělná. Pokud by totiž byla soudělná, jejich součet by byl dělitelný jejich největším společným dělitelem a nemohl tak být prvočíslem. Tedy největší společný dělitel čísel a, b je 1 a jejich nejmenší společný násobek je ab. Naše podmínky tak znamenají, že $a + b = 313$ a $313 \mid ab + 1$.

Dále máme několik způsobů, jak pokračovat v řešení:

1. Víme, že $313 = a + b$. Potom podmínka ze zadání má tvar $313 \mid (313 - b)b + 1$, tj. $313 \mid b^2 - 1 = (b - 1)(b + 1)$. Jelikož 313 je prvočíslo, musí být $313 \mid b - 1$ nebo $313 \mid b + 1$. Vzhledem k tomu, že nutně $313 = a + b > b > 0$, máme buď $313 = b + 1$ nebo $b - 1 = 0$. První možnost dává řešení $b = 312$, $a = 1$, druhá možnost dává řešení $b = 1$, $a = 312$.
2. Využitím podobné myšlenky jako byla v úloze 4 z domácího kola použijeme rozklad

$$ab + 1 = ab + 1 - a - b + a + b = (a - 1)(b - 1) + (a + b) = (a - 1)(b - 1) + 313,$$

ze kterého plyne, že 313 je dělitelem $(a-1)(b-1)$. Jelikož 313 je prvočíslo a $a, b < 313$, plyne z toho už nutně $a = 1$ a $b = 312$ nebo $a = 312$ a $b = 1$. Alternativně lze také použít rozklad $ab + 1 + a + b - a - b = (a + 1)(b + 1) - 313$.

3. Využijeme toho, že pokud $313 = a + b$, tak $313 \mid a(a + b)$ a jelikož také $313 \mid ab + 1$, tak 313 dělí i rozdíl těchto dvou čísel, který si vhodně upravíme a dostaneme:

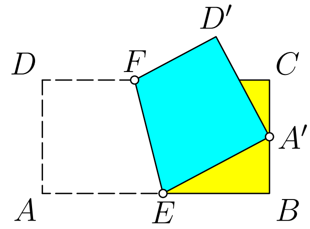
$$313 \mid a(a + b) - (ab + 1) = a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1).$$

Jelikož 313 je prvočíslo, tak máme $313 \mid a - 1$ nebo $313 \mid a + 1$. V prvním případě nutně $a = 1$, $b = 312$, nebo $313 = a + b > a - 1$.

Vidíme, že vyhovují dvě dvojice: $(312, 1)$ a $(1, 312)$.

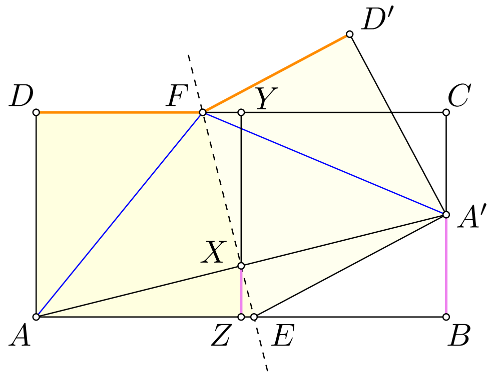
Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za tvrzení, že čísla a, b jsou nesoudělná udělte 1 bod. Za přepis podmínek na $a+b = 313$ a $313 \mid ab+1$ udělte další 1 bod. Za dokončení řešení udělte 4 body. Za numerickou chybu strhněte max. 1 bod.

3. *List papíru o rozměrech 2×1 přeložíme jako na obrázku tak, že vrchol A splyne se středem A' úsečky BC. Určete obsah přeložené části, tj. čtyřúhelníku $A'D'FE$.* (Tomáš Bárta)



Řešení. Odpověď je $\frac{15}{16}$.

Označme Y, Z po řadě středy stran CD, AB a X průsečík YZ s AA'. Pak je XZ rovnoběžné s BC a protože Z je střed strany AB, je XZ střední příčkou trojúhelníku ABA'. Proto je X středem úsečky AA' a platí $|XZ| = \frac{1}{2}|A'B|$.

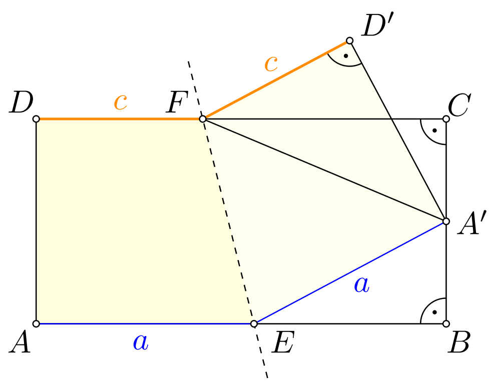


Protože $|AE| = |EA'|$, je trojúhelník AEA' rovnoramenný, a proto je jeho těžnice XE kolmá na AA'. Z toho plyne, že

$$|\sphericalangle ZXE| = 90^\circ - |\sphericalangle AXZ| = 90^\circ - (90^\circ - |\sphericalangle EAX|) = |\sphericalangle EAX|.$$

Trojúhelníky XZE a ABA' jsou proto podobné podle věty *uu* (oba jsou pravoúhlé). Poměr podobnosti těchto dvou trojúhelníků je $|XZ| : |AB| = \frac{1}{4} : 2 = 1 : 8 = |ZE| : |A'B|$. Odtud $|ZE| = \frac{1}{8}|BA'| = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$. Trojúhelníky XYF a XZE jsou podobné opět podle věty *uu* v poměru $|XY| : |XZ| = (1 - \frac{1}{4}) : \frac{1}{4} = 3 : 1$. Proto $|FY| = 3|ZE| = \frac{3}{16}$. Dále $|AE| = |AZ| + |ZE| = 1 + \frac{1}{16} = \frac{17}{16}$ a $|DF| = |DY| - |FY| = \frac{13}{16}$. Obsah přeložené části, tj. čtyřúhelníku $A'D'FE$, je shodný s obsahem lichoběžníku $AEFD$ a ten je podle vzorce pro obsah lichoběžníku roven $\frac{|AE|+|DF|}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{16} + \frac{13}{16}\right) = \frac{15}{16}$.

Jiné řešení (bez podobností). Odlišným postupem vyjádříme obsah S čtyřúhelníku $A'D'FE$. Je to lichoběžník, takže ze vzorce pro obsah lichoběžníku máme $S = \frac{a+c}{2}$, kde $a = |A'E|$ a $c = |D'F|$. Zároveň víme, že $|A'E| = |AE| = a$ a $|D'F| = |DF| = c$.



Z Pythagorovy věty pro trojúhelník EBA' máme

$$a^2 = (2-a)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

odkud $a = \frac{17}{16}$.

Podobně pomocí Pythagorovy věty pro trojúhelníky $FA'D'$ a $FA'C$ vyjádříme dvojím způsobem druhou mocninu délky přepony $|FA'|$

$$1 + c^2 = |FA'|^2 = (2-c)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

odkud $c = \frac{13}{16}$. Dohromady $S = (a+c)/2 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{16} + \frac{13}{16}\right) = \frac{15}{16}$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za zdůvodněné tvrzení o podobnosti trojúhelníků z prvního řešení udělte 2 body, 3 body pokud je určen a zdůvodněn i správný poměr podobnosti.

V obou řešeních za správný výpočet délky jedné z úseček AE nebo DF udělte 3 body a za správný výpočet délek obou úseček 5 bodů. Za správný finální výpočet obsahu lichoběžníku udělte 1 bod. Jenom za uvedení vzorce pro obsah lichoběžníku body neudělujte.

Za numerickou chybu strhněte max. 1 bod.