I. kolo kategorie Z9

Z9–I–1

Najděte všechny dvojice celých čísel x a y takových, že $x+y$ je prvočíslo a $3x+5y$ je 16. *(P. Bak)*

Možné řešení. Hledáme celá čísla x, y vyhovující podmínkám

$$3x+5y=16, \quad x+y=p,$$

kde p je neznámé prvočíslo. Z druhé rovnice vyjádříme $y=p-x$ a dosadíme do první rovnice. Po úpravách dostáváme:

$$\begin{aligned} 3x+5(p-x)&=16,\\ 5p-2x&=16,\\ 5p&=2(8+x). \end{aligned}$$

Na pravé straně poslední upravené rovnice je sudé číslo, tedy p musí být sudé prvočíslo neboli $p=2$. Odtud po dosazení dostáváme

$$5=8+x, \quad y=2-x.$$

Jediná vyhovující dvojice čísel je $x=-3$ a $y=5$.

Jiné řešení. Číslo $3x+5y=16$ je sudé, tedy x a y musí mít stejnou paritu (jinak by uvedená kombinace byla lichá). Proto také součet $x+y$ je sudý a jediné sudé prvočíslo je 2. Tedy $p=2$ a dostáváme soustavu rovnic:

$$3x+5y=16, \quad x+y=2.$$

Obvyklými úpravami (jako např. u předchozího řešení) zjistíme, že jediným řešením této soustavy je dvojice čísel $x=-3$ a $y=5$.

Jiné řešení. Začneme tím, že popíšeme všechna celočíselná řešení rovnice $3x+5y=16$ a poté ověříme druhou podmínku. Postupně pro násobky 5 vyjádříme rozdíl od 16 a ověříme dělitelnost třemi:

$5y$	…	-5	0	5	10	…
$16-5y$	…	21	16	11	6	…
děl. 3	…	ano	ne	ne	ano	…

Prvnímu vyhovujícímu případu v tabulce odpovídá dvojice $x_1=7$ a $y_1=-1$, druhému dvojice $x_2=2$ a $y_2=2$. Rozdíly mezi těmito dvěma řešeními (stejně jako mezi jakýmikoli dvěma sousedními řešeními) jsou $x_1 - x_2 = 5$ a $y_1 - y_2 = -3$. Všechna celočíselná řešení rovnice $3x + 5y = 16$ jsou tvaru

$$x = 2 + 5k, \quad y = 2 - 3k, \tag{$*$}$$

kde k je celé číslo. Pomocí tohoto mezivýsledku vyjádříme součet,

$$x + y = 4 + 2k = 2(2 + k),$$

což znamená, že $x+y$ je sudé číslo. Současně $x+y$ má být prvočíslo a jediné sudé prvočíslo je 2. Tedy $k = -1$ a po dosazení do $(*)$ dostáváme jedinou vyhovující dvojici čísel $x = -3$ a $y = 5$.

Z9–I–2

Pravidelný čtyřboký hranol má objem $864\,\mathrm{cm}^3$ a obsah jeho pláště je dvojnásobkem obsahu podstavy.

Určete velikost tělesové úhlopříčky hranolu. *(V. Dedek)*

Možné řešení. Označíme velikost hrany podstavy a, velikost výšky hranolu v a velikost jeho tělesové úhlopříčky u (vše v cm). Obsah podstavy je pak vyjádřen jako a^2, objem hranolu jako a^2v a obsah pláště jako $4av$. Ze zadání máme vztahy

$$a^2v = 864, \quad 4av = 2a^2,$$

z nichž vyjádříme a, v a následně dopočítáme u.

Po krácení z druhého vztahu (velikost a je nenulová) plyne $a = 2v$ a dosazením do prvního vztahu dostáváme $4v^3 = 864$. Tedy

$$v = \sqrt[3]{216} = 6, \quad a = 2 \cdot 6 = 12.$$

Tělesová úhlopříčka hranolu je přeponou pravoúhlého trojúhelníku, jehož jedna odvěsna je úhlopříčkou podstavy a druhá výškou hranolu. Dvojím užitím Pythagorovy věty dostáváme

$$u = \sqrt{2a^2 + v^2} = \sqrt{324} = 18.$$

Tělesová úhlopříčka hranolu měří 18 cm.

Z9–I–3

Množinu $\{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$ sestávající z prvních n přirozených čísel máme za úkol rozdělit do pěti neprázdných podmnožin tak, aby čísla v každé podmnožině byla po dvou nesoudělná.

Najděte největší možné n, pro které to je možné. *(T. Bárta)*

Možné řešení. Abychom mohli rozdělovat do pěti množin, musí být n alespoň pět.

Pro $n = 5$ je rozdělení jediné možné:

$$\{1\}, \ \{2\}, \ \{3\}, \ \{4\}, \ \{5\}.$$

Pro $n = 6$ je jedno z možných rozdělení toto:

$$\{1,2\},\ \{3\},\ \{4\},\ \{5\},\ \{6\}.$$

Pro rostoucí n můžeme zkoušet hledat rozdělení s požadovanými vlastnostmi. Budeme úspěšní až po $n = 11$, kde jedno z možných rozdělení je toto:

$$\{1,2\},\ \{3,4\},\ \{5,6\},\ \{7,8\},\ \{9,10,11\}.$$

Pro $n \geqq 12$ je v dané množině alespoň šest sudých čísel 2, 4, 6, 8, 10, 12, která máme rozdělit do pěti podmnožin. Tedy alespoň v jedné podmnožině se sejdou alespoň dvě sudá čísla. Každá dvě sudá čísla však mají společného dělitele, proto rozdělení s požadovanými vlastnostmi pro žádné $n \geqq 12$ není možné.

Největší možné n je 11.

Z9–I–4

Rozhodněte, zda je možné k číslu s ciferným součtem 2024 přičíst jednomístné číslo tak, aby výsledné číslo mělo ciferný součet 74. (*T. Bárta*)

Možné řešení. Po přičtení jednomístného čísla se má ciferný součet podstatně zmenšit. To se může stát v čísle s hodně devítkami za sebou, které se změní na nuly. Např. číslo 9994 s ciferným součtem 31 se po přičtení 6 změní na číslo 10000 s ciferným součtem 1.

V našem případě se má ciferný součet zmenšit o $2024 - 74 = 1950$. Přitom platí $1950 = 216 \cdot 9 + 6$, tedy budeme potřebovat 216 devítek. Rozdílu 1950 v ciferných součtech lze dosáhnout tak, že k číslu sestávajícího z 216 devítek a sedmičky (které má ciferný součet $216 \cdot 9 + 7 = 1951$) přičteme 3, čímž dostaneme číslo sestávající z jedničky a 217 nul (které má ciferný součet 1).

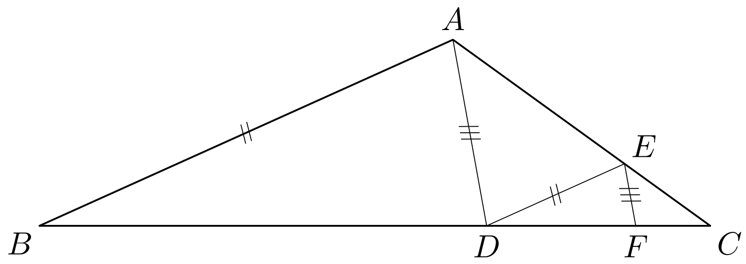
Nyní stačí předchozí nápad upravit tak, aby původní číslo mělo ciferný součet 2024. Protože $2024 = 1951 + 73$, stačí zleva přidat libovolnou posloupnost číslic se součtem 73 a jednu nulu. Vyhovující odpovědí může být např. číslo sestávající ze 73 jedniček, jedné nuly, 216 devítek a sedmičky:

1111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111-
0999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999-
9999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999-
999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999997

Z9–I–5

V trojúhelníku ABC je strana AB dvakrát delší než strana AC. Osa úhlu BAC protíná stranu BC v bodě D. Rovnoběžka se stranou AB procházející bodem D protíná stranu AC v bodě E. Rovnoběžka s úsečkou AD procházející bodem E protíná stranu BC v bodě F.

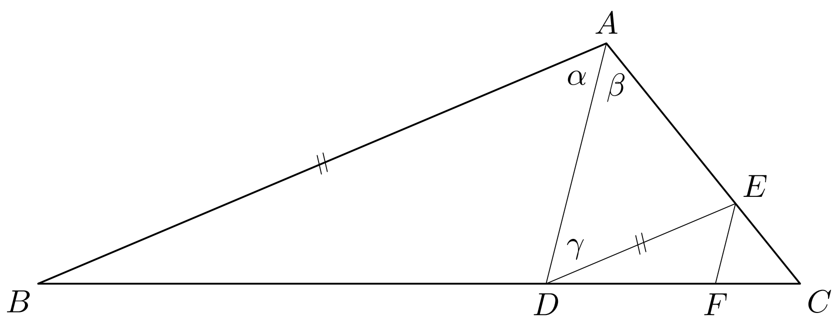
Určete poměr úseček AD a EF. (*M. Dományová*)



Poznámka: obrázek je pouze ilustrační.

Možné řešení. Díky rovnoběžnosti $AD \| EF$ jsou trojúhelníky CAD a CEF podobné a hledaný poměr úseček odpovídá koeficientu této podobnosti. Díky rovnoběžnosti $AB \| ED$ jsou také trojúhelníky CAB a CED podobné. Koeficient podobnosti pro první i pro druhou dvojici trojúhelníků je stejný, neboť je určen týmž bodem E na straně AC. Tento poměr odvodíme z daného poměru stran trojúhelníku ABC.

Začneme tím, že si uvědomíme několik vztahů mezi úhly vyznačenými na následujícím obrázku:



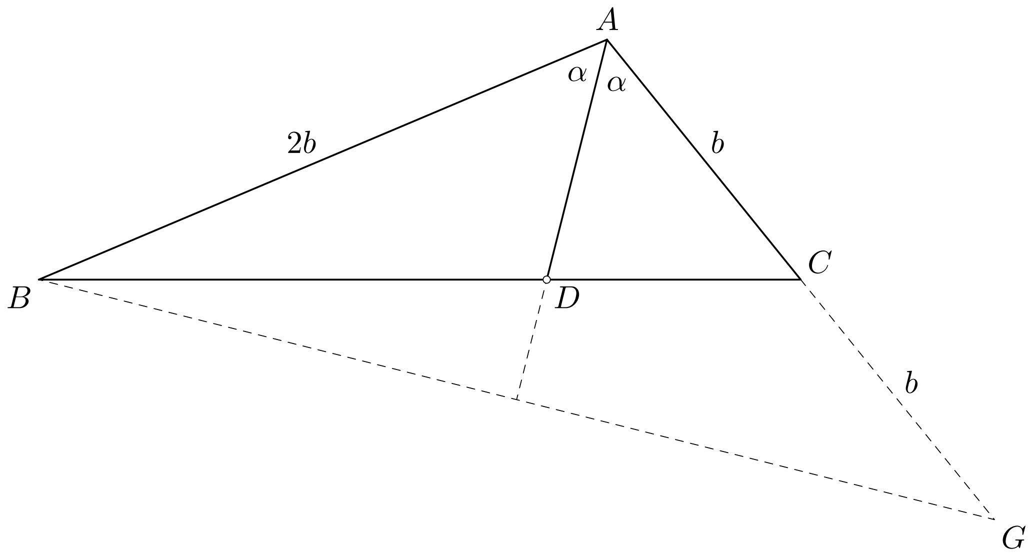
Přímka AD je osou úhlu BAC, tedy sousední úhly α a β jsou shodné. Přímky AB a ED jsou rovnoběžné, tedy střídavé úhly α a γ u vrcholů A a D jsou shodné. Celkem platí, že úhly β a γ jsou shodné. Tedy trojúhelník ADE je rovnoramenný se shodnými rameny AE a ED.

Trojúhelníky CAB a CED jsou podobné, tedy odpovídající si poměry stran jsou stejné. Zejména $|ED| : |EC| = |AB| : |AC|$, a tento poměr je podle zadání $2 : 1$. Dohromady s předchozím poznatkem ($|AE| = |ED|$) dostáváme $|AE| : |EC| = 2 : 1$ neboli $|AC| : |EC| = 3 : 1$. To je hledaný poměr podobnosti trojúhelníků CAD a CEF.

Úsečky AD a EF jsou v poměru $3 : 1$.

Poznámky. Obecně platí, že osa vnitřního úhlu trojúhelníku dělí protilehlou stranu ve stejném poměru, v jakém jsou přilehlé strany. V našem případě to znamená $|BD| : |DC| = |BA| : |AC|$ a obdobně (ze vzájemné podobnosti) $|DF| : |FC| = |DE| : |EC|$. Tento poměr však známe ze zadání, tj. $|DF| : |FC| = 2 : 1$ neboli $|DC| : |FC| = 3 : 1$. To je hledaný poměr podobnosti trojúhelníků CAD a CEF, a tedy i úseček AD a EF.

Všechny zmiňované dvojice podobných trojúhelníků jsou stejnolehlé se středem v bodě C. Hledaný poměr velikosti úseček AD a EF je koeficientem této stejnolehlosti, zejména platí $|AD| : |EF| = |BC| : |DC|$. To, že tento poměr je $3 : 1$, plyne z interpretace bodu D jakožto těžiště ve vhodném trojúhelníku:



Zde bod G je doplněn jako bod souměrný s bodem A podle středu C. Bod C je středem úsečky AG, tedy přímka BC je těžnicí trojúhelníku ABG. Trojúhelník ABG je rovnoramenný a přímka AD je osou úhlu vymezeného rameny AB a AG, tedy to je také těžnice. Proto je bod D těžištěm trojúhelníku ABG.

Z9–I–6

Plavci Pstruh a Pulec chtěli změřit své síly. Z protilehlých stran bazénu skočili současně do sousedních drah a plavali proti sobě, každý svojí konstantní rychlostí. Poprvé se plavci minuli ve vzdálenosti osm metrů od Pstruhovy startovní strany, na konci dráhy se hbitě otočili a plavali nazpět. Podruhé se plavci minuli ve vzdálenosti pět metrů od Pulcovy startovní strany, doplavali na konec dráhy, a tím závod skončil.

Určete, kdo vyhrál a jaká byla délka bazénu. (*L. Hozová*)

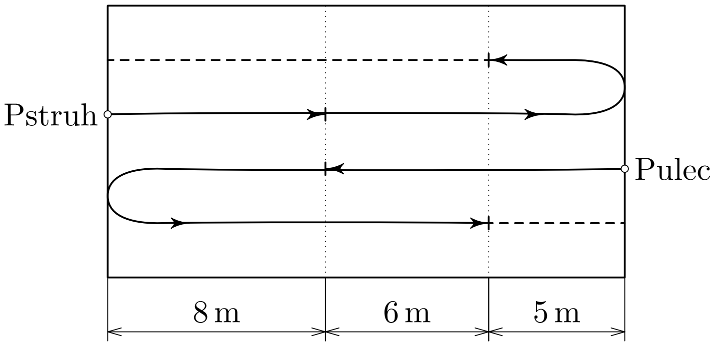
Možné řešení. Druhé míjení proběhlo blíž od Pulcova břehu než první míjení od Pstruhova břehu. Tedy Pulec plaval rychleji než Pstruh, a proto po zásluze vyhrál.

Při prvním míjení měli Pstruh a Pulec v součtu uplavánu jednu délku bazénu, při druhém míjení měli v součtu tři délky bazénu. Pokud označíme t čas prvního míjení, pak v čase $2t$ měl Pulec otočku za sebou, zatímco Pstruh před sebou, a v čase $3t$ se míjeli podruhé.

Pstruh za čas t uplaval 8 metrů, tedy za čas $3t$ uplaval 24 metrů. Současně v čase $3t$ přeplaval celý bazén a dalších 5 metrů po otočce. Bazén měl na délku 19 metrů ($24-5=19$).

Poznámky. Pro kontrolu můžeme vyjádřit vzdálenost mezi místy míjení jako $19-8-5=$ $=6\,(\mathrm{m})$. Pulec za časový interval délky t uplaval $5+6=11\,(\mathrm{m})$. Mezi časy t a $2t$ doplaval na konec bazénu, otočil se a přidal $11-8=3\,(\mathrm{m})$. Mezi časy $2t$ a $3t$ uplaval dalších $11\,\mathrm{m}$ a na druhý konec bazénu mu chybělo $19-3-11=5\,(\mathrm{m})$. To souhlasí s údajem ze zadání.

Přikládáme pokus o znázornění celé situace:



Jiné řešení. K délce bazénu se lze dopočítat pomocí neznámé x, která značí vzdálenost v metrech mezi místy prvního a druhého míjení:

Z předchozího řešení víme, že vzdálenost, kterou uplaval každý z plavců od prvního míjení po druhé míjení, je dvojnásobkem vzdálenosti, kterou uplaval od startu po první míjení. Vyjádříme-li tyto vzdálenosti pro Pstruha, dostáváme

$$x + 10 = 2 \cdot 8,$$

a tedy $x = 6$. Bazén měl na délku 19 metrů ($8 + 6 + 5 = 19$).

Poznámky. Pro kontrolu můžeme vyjádřit uvedené vzdálenosti pro Pulce: dostáváme rovnici

$$16 + x = 2(5 + x)$$

s týmž řešením $x = 6$.

Předchozí vztahy pro Pstruha a Pulce lze souhrnně zapsat takto:

$$\frac{x + 10}{8} = \frac{16 + x}{5 + x} = 2.$$

Bez úvodního postřehu o poměrech uplavaných vzdáleností mezi startem a místy míjení máme jen rovnici

$$\frac{x + 10}{8} = \frac{16 + x}{5 + x}.$$

Ta po úpravách vede ke kvadratické rovnici

$$x^2 + 7x - 78 = 0,$$

která má kořeny $x = 6$ a $x = -13$. Řešení naší úlohy odpovídá kladný kořen.