74. ročník Matematické olympiády (2024/2025)

Úlohy krajského kola kategorie A

1. Jsou dána dvě navzájem různá reálná čísla a, b taková, že výrazy $a^3 + b$ a $a + b^3$ mají stejnou hodnotu. Dokažte, že pro jejich součin platí $-1 \leqq ab < \frac{1}{3}$.

2. Probíhá online hlasování mezi variantami A a B. Než Pavel hlasoval, byl počet procent hlasů pro variantu A roven kladnému celému číslu. Pavlovým hlasem se toto číslo zvětšilo přesně o jedna. Dokažte, že Pavlův hlas byl devatenáctým hlasem pro variantu A.

3. V týmu je sedm hráčů. V každém kole turnaje jich pět hraje a dva sedí na tribuně. Dokažte, že nezávisle na (kladném) počtu kol i výběru pětic lze na konci turnaje nalézt dva hráče, kteří byli spolu (ať už na hřišti nebo na tribuně) ve více než polovině kol.

4. V rovině je dána úsečka BC. Uvažujeme všechny ostroúhlé trojúhelníky ABC, v nichž $|\sphericalangle BAC| = 45°$. V každém takovém trojúhelníku označíme D a E po řadě ty body stran AB a AC, pro které je přímka BC společnou tečnou kružnic opsaných trojúhelníkům ACD a ABE. Paty kolmic z bodů D a E k přímce BC označíme po řadě P a Q. Dokažte, že v rovině existuje bod X neležící na přímce BC, pro nějž velikost úhlu PXQ nezávisí na poloze bodu A.

Krajské kolo kategorie A se koná

v úterý 14. ledna 2025

tak, aby začalo nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času; případné dotazy k textu zadání mohou být zodpovězeny v prvních 20 minutách. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Bodová hranice k určení úspěšných řešitelů bude stanovena centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. *Jsou dána dvě navzájem různá reálná čísla a, b taková, že výrazy a^3+b a $a+b^3$ mají stejnou hodnotu. Dokažte, že pro jejich součin platí $-1 \leqq ab < \frac{1}{3}$.*

(Jana Kopfová, Jaromír Šimša)

Řešení. Odečtením výrazů a^3+b a $a+b^3$ a vytknutím rozdílu $a-b$ dostaneme

$$0 = (a^3+b)-(a+b^3) = (a^3-b^3)-(a-b) = (a-b)(a^2+ab+b^2-1).$$

Odtud po vydělení nenulovým výrazem $a-b$ plyne $a^2+ab+b^2=1$.

Požadované dvě nerovnosti dokážeme zvlášť. Pro důkaz horního odhadu postupně upravujme

$$1 = a^2+ab+b^2 = (a-b)^2+3ab > 3ab,$$

kde nerovnost je ostrá, jelikož ze zadání máme $a \neq b$, a tedy $(a-b)^2 > 0$. Po vydělení třemi již dostáváme $ab < 1/3$.

Podobně pro důkaz dolního odhadu upravujme

$$1 = a^2+ab+b^2 = (a+b)^2-ab \geqq -ab,$$

kde nerovnost platí, protože $(a+b)^2 \geqq 0$. Proto skutečně $ab \geqq -1$.

Poznámka. Z předvedeného řešení plyne, že rovnost v nerovnosti $-1 \leqq ab$ nastane, právě když $b=-a$. Lze dopočítat, že to nastane pro $(a,b) \in \{(1,-1),(-1,1)\}$. Rovněž lze ukázat, že hodnota součinu ab může být libovolně blízko k horní hranici $\frac{1}{3}$, ale hodnoty přesně $\frac{1}{3}$ kvůli podmínce $a \neq b$ nikdy nedosáhne.

Poznámka. Důkaz horního odhadu $ab < 1/3$ pro reálná čísla, která splňují vztah $a^2+ab+b^2=1$, lze vést různě. Například lze prohlásit za známé, že platí nerovnosti $a^2+b^2 \geqq 2ab$ resp. $a^2+ab+b^2 \geqq 3ab$ a že v nich nastává rovnost jen v případě $a=b$.

Jiné řešení. Nastíníme ještě jiný způsob, jak dokončit řešení od okamžiku, kdy jsme odvodili vztah $a^2+ab+b^2=1$. Na odvozený vztah se podíváme jako na kvadratickou rovnici v proměnné b s parametrem a

$$b^2+a\cdot b+(a^2-1)=0.$$

Její diskriminant je $D = a^2-4(a^2-1) = 4-3a^2$. Aby byl diskriminant nezáporný, musí být $a^2 \leqq \frac{4}{3}$ neboli $a \in \langle -\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{2}{3}\sqrt{3}\rangle$. Podle známého vzorce pro řešení kvadratické rovnice máme $b_{1,2} = \frac{-a\pm\sqrt{4-3a^2}}{2}$. Místo dokazování $-1 \leqq ab < \frac{1}{3}$ tak můžeme dokazovat nerovnosti v jediné proměnné a, a to

$$-1 \leqq a\cdot\frac{-a\pm\sqrt{4-3a^2}}{2} < \frac{1}{3}.$$

Tyto dvě nerovnosti dokážeme zvlášť. Tu levou nejdřív ekvivalentně upravíme do tvaru

$$\mp a\sqrt{4-3a^2} \leqq 2-a^2.$$

Díky nerovnosti $a^2 \leqq \frac{4}{3} < 2$ je pravá strana nezáporná, takže po umocnění na druhou stačí dokázat nerovnost

$$a^2(4-3a^2) \leqq (2-a^2)^2,$$

která je po úpravě ekvivalentní se zřejmou nerovností $0 \leqq 4(a^2-1)^2$. Pravou nerovnost dokážeme podobně. Upravíme ji do tvaru

$$\pm 3a\sqrt{4-3a^2} < 2+3a^2,$$

takže po umocnění na druhou stačí dokázat nerovnost

$$9a^2(4-3a^2) < 4+12a^2+9a^4,$$

která je po úpravě ekvivalentní s nerovností $0 < 4(3a^2-1)^2$. Jistě platí neostrá nerovnost $0 \leqq 4(3a^2-1)^2$, přitom rovnost nastává jen pokud $|a| = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Pro $a = +\frac{1}{3}\sqrt{3}$ vyjde $b_{1,2} \in \{+\frac{1}{3}\sqrt{3}, -\frac{2}{3}\sqrt{3}\}$. První případ je ze zadání vyloučen a v druhém případě (kdy $a > 0 > b$) je dokazovaná nerovnost $ab < \frac{1}{3}$ splněna triviálně. Podobně pro $a = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$ vyjde $b_{1,2} \in \{-\frac{1}{3}\sqrt{3}, +\frac{2}{3}\sqrt{3}\}$ a závěr je stejný.

Jiné řešení. Zavedeme nové proměnné $s = \frac{1}{2}(a+b)$, $d = \frac{1}{2}(a-b)$. Pak $a = s+d$, $b = s-d$ a podle podmínky úlohy je $d \neq 0$. Rovnost $a^3+b = b^3+a$ tak přejde v

$$(s+d)^3+(s-d) = (s-d)^3+(s+d),$$

což po umocnění a následné úpravě dává $6s^2d+2d^3 = 2d$. Po vydělení (nenulovým) číslem $2d$ dostaneme rovnost

$$3s^2+d^2 = 1,$$

která je obdobou rovnosti $a^2+ab+b^2 = 1$ z předchozích řešení. Ze vztahu $3s^2+d^2 = 1$ plyne $0 < d^2 \leqq 1$ a $s^2 = \frac{1}{3}(1-d^2)$. Máme za úkol odhadnout výraz

$$ab = (s+d)(s-d) = s^2-d^2 = \frac{1}{3}(1-4d^2).$$

To je už snadné. Jelikož $d^2 > 0$, platí $ab < \frac{1}{3}(1-4\cdot 0) = \frac{1}{3}$. A jelikož $d^2 \leqq 1$, platí $ab \geqq \frac{1}{3}(1-4\cdot 1) = -1$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky z výše popsaných postupů následovně:

A1. Důkaz nerovnosti $ab < 1/3$: 3 body.
A2. Důkaz nerovnosti $ab \geqq -1$: 3 body.
B1. Odvození rovnosti $a^2+ab+b^2 = 1$: 2 body.
H1. Důkaz, že z $a^2+ab+b^2 = 1$ plyne $ab \leqq 1/3$: 1 bod.
H2. Důkaz, že z $a^2+ab+b^2 = 1$ a $a \neq b$ plyne $ab < 1/3$: 2 body.
D1. Důkaz, že z $a^2+ab+b^2 = 1$ plyne $ab \geqq -1$: 2 body.

Celkem pak za neúplná řešení udělte $\max(\mathrm{A1}+\mathrm{A2},\ \mathrm{B1}+\max(\mathrm{H1},\mathrm{H2})+\mathrm{D1})$ bodů.

2. *Probíhá online hlasování mezi variantami A a B. Než Pavel hlasoval, byl počet procent hlasů pro variantu A roven kladnému celému číslu. Pavlovým hlasem se toto číslo zvětšilo přesně o jedna. Dokažte, že Pavlův hlas byl devatenáctým hlasem pro variantu A.* (Josef Tkadlec)

Řešení. Zaměřme se na moment těsně před tím, než hlasoval Pavel. Označme n počet hlasujících (před Pavlem) a a počet hlasů, které tehdy varianta A měla. Jelikož počet procent hlasů pro variantu A byl kladný, aspoň někdo pro ni hlasoval, takže $a, n \geqq 1$. Pavlovým hlasem stoupl podíl hlasů pro variantu A o 1 procentní bod, platí tak

$$\frac{a+1}{n+1} = \frac{a}{n} + \frac{1}{100}, \tag{1}$$

což po odstranění zlomků a dalších úpravách převedeme do tvaru

$$\begin{aligned} 100n(a+1) &= 100(n+1)a + n(n+1), \\ 100n &= 100a + n(n+1), \\ n(99-n) &= 100a. \end{aligned} \tag{2}$$

Jelikož pravá strana je kladná, musí být $n \in \{1, 2, \ldots, 98\}$. Pro každou z těchto 98 možných hodnot n bychom teď v principu mohli prostým dosazením zjistit, zda hodnota $a = n(99-n)/100$ vyjde celočíselná. Práci si ulehčíme následujícím pozorováním.

Pravá strana rovnosti (2) je násobkem 25, takže i levá strana musí být násobkem 25. Protože číslo 99 není dělitelné pěti, nemohou být současně dělitelní pěti oba činitelé n a $99-n$, tudíž násobkem 25 musí být jeden z nich. V úvahu tak přicházejí součiny $25 \cdot 74$, $50 \cdot 49$ a $75 \cdot 24$ (kde činitelé odpovídají číslům n a $99-n$ v jednom ze dvou pořadí). Součin je násobkem 100, je tak dělitelný čtyřmi, čemuž vyhovuje jen ten třetí z nich. Platí tedy buď $n = 75$, nebo $n = 24$. V obou případech získáme $a = n(99-n)/100 = 75 \cdot 24/100 = 18$, takže Pavlův hlas byl skutečně devatenáctým hlasem pro variantu A.

Poznámka. I když to nebylo naším úkolem, dokázali jsme vlastně, že popsané hlasování mohlo mít dvě podoby:

(i) v případě $n = 75$ hlasoval Pavel jako 76. v pořadí a podíl hlasů pro variantu A stoupl z $18/75 = 24\ \%$ na $19/76 = 25\ \%$,

(ii) v případě $n = 24$ hlasoval Pavel jako 25. v pořadí a podíl hlasů pro variantu A stoupl z $18/24 = 75\ \%$ na $19/25 = 76\ \%$.

Poznámka. V řešení jsme nikde nepoužili informaci, že počet procent hlasů pro variantu A byl roven celému číslu – stačilo nám, že toto číslo bylo kladné a že rozdíl před hlasováním a po něm byl roven 1.

Poznámka. Rovnici (2) lze řešit i jiným způsobem, například jako kvadratickou rovnici $n^2 - 99n + 100a = 0$ s proměnnou n a parametrem a. Diskriminant $D = 9801 - 400a$ této rovnice je nezáporný, takže platí $a \in \{1, 2, \ldots, 24\}$ a dále lze postupovat různě.

Jiné řešení. Jako v prvním řešení označme n počet hlasujících před Pavlem a a počet hlasů pro variantu A. Navíc označme ještě $p \in \mathbb{N}$ počet procent hlasů, které tehdy varianta A měla. Ze zadání pak máme

$$\frac{a}{n} = \frac{p}{100} \qquad \text{a} \qquad \frac{a+1}{n+1} = \frac{p+1}{100}.$$

Opět odstraníme zlomky a po úpravě dostaneme

$$100a = n \cdot p \qquad \text{a} \qquad 100a + 100 = n \cdot p + n + p + 1,$$

odkud dosazením prvního vztahu do druhého (nebo jejich odečtením) vyjde $n + p = 99$. Následně dosazením do prvního vztahu dostaneme

$$100a = n \cdot (99 - n)$$

a můžeme pokračovat jako v prvním řešení.

Poznámka. Existuje více způsobů jak vystihnout informace ze zadání pomocí rovnice nebo soustavy rovnic. Například místo čísla n ze vzorového řešení lze pracovat s číslem $n' = n + 1$ (tj. počet hlasujících včetně Pavla), s číslem $a' = a + 1$ (tj. počet hlasů pro variantu A včetně Pavla), případně s číslem $b = n - a = n' - a'$ (tj. počet hlasů pro variantu B). Vztah (1) z prvního vzorového řešení tak lze vyjádřit mnoha způsoby, například jako

$$\frac{a'}{n'} = \frac{a' - 1}{n' - 1} + \frac{1}{100} \qquad \text{nebo} \qquad \frac{a+1}{a+b+1} = \frac{a}{a+b} + \frac{1}{100}.$$

Podobně vztah (2) lze vyjádřit například jako

$$\frac{1}{100} = \frac{n-a}{n(n+1)} \quad \text{nebo} \quad 100(n' - a') = n'(n' - 1) \quad \text{nebo} \quad (a+b)(99 - a - b) = 100a.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky z výše popsaných postupů následovně:

A1. Odvození vztahu (1) nebo obdobné rovnice (resp. soustavy rovnic), která zachycuje informaci, že počty procent se liší o 1: 1 bod.

A2. Odvození vztahu (2) nebo obdobné rovnice v součinovém tvaru jako v poslední poznámce: 2 body.

A3. Redukce úlohy na rozbor konečně mnoha případů (například zdůvodněním, že musí být $n \leqq 100$): 1 bod.

Celkem pak za neúplná řešení udělte A1 + A2 + A3 bodů.

3. *V týmu je sedm hráčů. V každém kole turnaje jich pět hraje a dva sedí na tribuně. Dokažte, že nezávisle na (kladném) počtu kol i výběru pětic lze na konci turnaje nalézt dva hráče, kteří byli spolu (ať už na hřišti nebo na tribuně) ve více než polovině kol.*

(David Hruška)

Řešení. V každém kole se setkala jedna dvojice hráčů na tribuně a k tomu $\binom{5}{2} = 10$ dvojic hráčů na hřišti, takže v každém kole se setkalo $1 + 10 = 11$ dvojic hráčů. Označme $k > 0$ počet kol. Pak v průběhu celého turnaje se setkalo celkem $11k$ dvojic hráčů. Všech dvojic hráčů je dohromady $\binom{7}{2} = 21$, takže ta dvojice, která se setkávala nejčastěji, se musela setkat v alespoň $11k/21$ kolech. Díky $k > 0$ platí $\frac{11}{21}k > \frac{1}{2}k$, takže jsme hotovi.

Poznámka. Klíčovou myšlenkou řešení je postřeh, že v každém kole je spolu 11 dvojic hráčů, což je více než polovina ze všech 21 dvojic. Samotné řešení pak lze zformulovat různě, například i následovně: Označme opět k počet kol turnaje. Uvažme všech $\binom{7}{2} = 21$ dvojic hráčů a označme postupně $a_1, a_2, \ldots, a_{21}$ počty kol, ve kterých byli hráči jednotlivých dvojic spolu. Pro spor předpokládejme, že každá dvojice byla spolu v nejvýše polovině kol. Pak sečtením nerovností $a_i \leqq \frac{1}{2}k$ pro $i = 1, \ldots, 21$ dostáváme

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{21} \leqq 21 \cdot \tfrac{1}{2}k = 10{,}5k.$$

Jenže v každém kole je spolu právě $1 + \binom{5}{2} = 11$ dvojic, takže platí

$$11k = a_1 + a_2 + \ldots + a_{21} \leqq 10{,}5k.$$

To je ovšem spor, protože pro $k > 0$ platí opačná nerovnost $11k > 10{,}5k$.

Poznámka. Kdybychom počítali jen hráče, kteří jsou spolu na hřišti, tvrzení by neplatilo: Uvažme turnaj o $\binom{7}{2} = 21$ kolech, kde v každém kole je na tribuně jiná dvojice hráčů. Pak libovolní dva hráči jsou spolu na hřišti právě tehdy, když je na tribuně jedna z $\binom{5}{2} = 10$ dvojic zbývajících hráčů. Takže každá dvojice hráčů je spolu na hřišti v méně než polovině kol.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky z výše popsaných postupů následovně:

A1. Jakýkoliv (i chybný) pokus o počítání dvojic hráčů se slovním doprovodem (např. "Celkem je v týmu $7 \cdot 6 = 42$ dvojic hráčů."): 1 bod.

B1. Zdůvodnění, že celkem je v týmu 21 dvojic hráčů: 1 bod.

B2. Zdůvodnění, že v každém kole je spolu 11 dvojic hráčů: 2 body.

C1. Zdůvodnění, že v každém kole je spolu *alespoň* polovina všech dvojic hráčů: 3 body.

C2. Zdůvodnění, že v každém kole je spolu *více než* polovina všech dvojic hráčů: 4 body.

D1. Prohlášení, že jelikož v každém kole je spolu více než polovina dvojic, je některá dvojice spolu ve více než polovině kol: 1 bod.

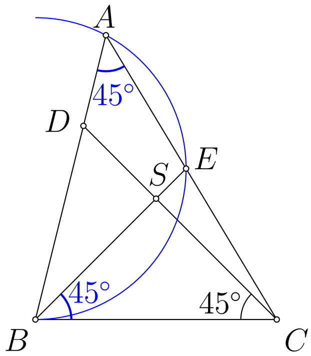
D2. Důkaz, že z C2 plyne požadovaný závěr, například pomocí sečtení počtů dvojic přes všechna kola turnaje (a použití Dirichletova principu), nebo pomocí jiného stejně exaktního argumentu: 2 body.

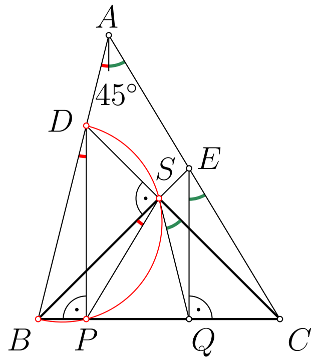
Celkem pak za neúplná řešení udělte $\max(\mathrm{A1}, \mathrm{B1} + \mathrm{B2}, \mathrm{C1}, \mathrm{C2} + \max(\mathrm{D1}, \mathrm{D2}))$ bodů.

4. *V rovině je dána úsečka BC. Uvažujeme všechny ostroúhlé trojúhelníky ABC, v nichž $|\sphericalangle BAC| = 45°$. V každém takovém trojúhelníku označíme D a E po řadě ty body stran AB a AC, pro které je přímka BC společnou tečnou kružnic opsaných trojúhelníkům ACD a ABE. Paty kolmic z bodů D a E k přímce BC označíme po řadě P a Q. Dokažte, že v rovině existuje bod X neležící na přímce BC, pro nějž velikost úhlu PXQ nezávisí na poloze bodu A.* (Zdeněk Pezlar)

Řešení. Díky osové souměrnosti podle přímky BC stačí uvažovat jen ty ostroúhlé trojúhelníky ABC splňující $|\sphericalangle BAC| = 45°$, které leží v jedné polorovině určené přímkou BC. Zaměřme se na libovolný takový trojúhelník ABC a označme S průsečík úseček BE a CD (obrázek vlevo).

Jelikož přímka BC je tečnou kružnice opsané trojúhelníku ABE, podle věty o obvodovém a úsekovém úhlu platí $|\sphericalangle CBE| = |\sphericalangle BAE| = 45°$. Podobně je BC tečnou kružnice opsané trojúhelníku ACD, takže platí $|\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle DAC| = 45°$. Celkem tak dostáváme, že SBC je rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s přeponou BC ležící ve stejné polorovině určené přímkou BC jako trojúhelník ABC. Poloha bodu S proto nezávisí na poloze bodu A. Dokážeme, že bod S je hledaným pevným bodem X ze zadání úlohy (jediným dalším takovým bodem je bod s ním souměrně sdružený podle přímky BC).





Body P, Q zapojíme do obrázku pomocí tětivových čtyřúhelníků (obrázek vpravo). Jelikož úhly DPB a DSB jsou oba pravé, leží body P a S na Thaletově kružnici s průměrem BD. Čtyřúhelník $BPSD$ je proto tětivový a z obvodových úhlů příslušných kratšímu oblouku BP určíme při obvyklém značení úhlů $|\sphericalangle BSP| = |\sphericalangle BDP| = 90° - \beta$. Zcela analogicky ukážeme, že je tětivový i čtyřúhelník $CQSE$ a že platí $|\sphericalangle QSC| = |\sphericalangle QEC| = 90° - \gamma$.

Velikost úhlu PSQ teď vyjádříme jako část velikosti úhlu BSC. Platí

$$|\sphericalangle BSP| + |\sphericalangle QSC| = (90° - \beta) + (90° - \gamma) = 180° - \beta - \gamma = \alpha = 45°,$$

takže

$$|\sphericalangle PSQ| = |\sphericalangle BSC| - (|\sphericalangle BSP| + |\sphericalangle QSC|) = 90° - 45° = 45°,$$

což je pevná hodnota, která skutečně nezávisí na poloze bodu A.

Poznámka. Po objevení tětivových čtyřúhelníků $BPSD$ a $CQSE$ lze úlohu „doúhlit“ různými způsoby. Například z tětivového čtyřúhelníku $BPSD$ a trojúhelníku BCD

získáme $|\sphericalangle QPS| = |\sphericalangle BDC| = 180° - \beta - 45° = 135° - \beta$. Podobně $|\sphericalangle SQP| = 135° - \gamma$, takže v trojúhelníku SPQ má zbývající úhel velikost

$$|\sphericalangle PSQ| = 180° - (135° - \beta) - (135° - \gamma) = \beta + \gamma - 90° = 45°.$$

POZNÁMKA. Lze dokázat, že bod $S = BE \cap CD$ splývá se středem O kružnice opsané trojúhelníku ABC – pro střed O totiž podle věty o obvodovém a středovém úhlu platí $|\sphericalangle BOC| = 90°$ a současně $|OB| = |OC|$, takže trojúhelník OBC je (stejně jako trojúhelník SBC) rovnoramenný a pravoúhlý s přeponou BC.

POZNÁMKA. Podstatnou částí řešení je zformulování domněnky, že hledaným pevným bodem bude průsečík $S = BE \cap CD$ (případně střed O kružnice opsané trojúhelníku ABC). K tomu může pomoci, pokud si řešitel uvědomí, že hledaný pevný bod musí ležet na ose ℓ úsečky BC – pro body Y mimo přímku ℓ (a mimo BC) se totiž velikost úhlu PYQ změní, pokud místo trojúhelníku ABC uvážíme jeho obraz $A'CB$ v osové souměrnosti podle přímky ℓ. (Rovněž může pomoci zkoumání limitního případu, v němž bod A téměř splývá s jedním z vrcholů B, C a platí $|\sphericalangle BAC| = 45°$ – byť trojúhelník ABC tehdy není ostroúhlý.)

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky následovně:

Pro řešitele, kteří pracují s průsečíkem S úseček BE a CD:

S1. Zformulování domněnky, že bod S (resp. jeho osový obraz podle přímky BC) je hledaným pevným bodem (bez důkazu): 1 bod.
S2. Odvození aspoň jedné z rovností $|\sphericalangle DCB| = 45°$, $|\sphericalangle CBE| = 45°$ (stačí vyznačeno v obrázku): 1 bod.
S3. Důkaz, že bod S je společný pro všechny trojúhelníky ABC ležící v jedné polorovině určené přímkou BC: 1 bod.
S4. Důkaz, že aspoň jeden ze čtyřúhelníků $BPSD$, $CESQ$ je tětivový: 1 bod.
S5. Dokončení řešení za předpokladu, že oba čtyřúhelníky $BPSD$, $CESQ$ jsou tětivové: 2 body.

Pro řešitele, kteří pracují se středem O kružnice opsané trojúhelníku ABC, resp. s rovnoramenným pravoúhlým trojúhelníkem OBC s přeponou BC:

O1. Zformulování domněnky, že bod O (resp. jeho osový obraz podle přímky BC) je hledaným pevným bodem (bez důkazu): 1 bod.
O2. Důkaz, že $|\sphericalangle OCB| = |\sphericalangle CBO| = 45°$ a že bod O je společný pro všechny trojúhelníky ABC ležící v jedné polorovině určené přímkou BC: 0 bodů.
O3. Odvození aspoň jedné z rovností $|\sphericalangle DCB| = 45°$, $|\sphericalangle CBE| = 45°$ (stačí vyznačeno v obrázku): 1 bod.
O4. Důkaz, že bod O splývá s průsečíkem úseček BE a CD: 1 bod.
O5. Důkaz, že aspoň jeden ze čtyřúhelníků $BPOD$, $CEOQ$ je tětivový: 1 bod.
O6. Dokončení řešení za předpokladu, že oba čtyřúhelníky $BPOD$, $CEOQ$ jsou tětivové: 2 body.

Celkem pak za neúplná řešení udělte $\max(\mathrm{S1} + \mathrm{S2} + \mathrm{S3} + \mathrm{S4} + \mathrm{S5}, \mathrm{O1} + \mathrm{O3} + \mathrm{O4} + \mathrm{O5} + \mathrm{O6})$ bodů.