74. ročník Matematické olympiády (2024/2025)

Úlohy školního kola kategorie A

1. Rozhodněte, zda existují navzájem různá reálná čísla a, b, c taková, že čísla $a^2 + b$, $b^2 + c$, $c^2 + a$ se v nějakém pořadí rovnají číslům $a + b^2$, $b + c^2$, $c + a^2$.

2. Je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$ takový, že $|AB| = |BC|$, $|AE| = |DE|$, $AC \perp AD$ a $CD \parallel BE$. Dokažte, že trojúhelníky ABC a AED mají stejné obsahy.

3. Řekneme, že přirozené číslo je *ploché*, pokud jsou všechny jeho číslice stejné (i jednomístná čísla považujeme za plochá). Rozhodněte, zda lze každé přirozené číslo, které není ploché, vyjádřit jako součet několika navzájem různých plochých čísel.

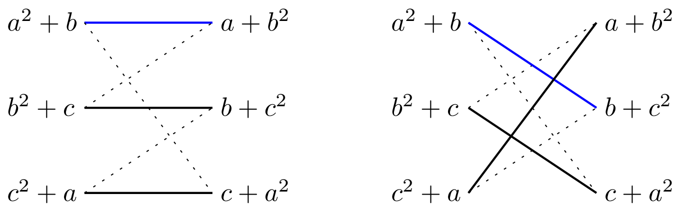
Školní kolo kategorie A se koná

v úterý 10. prosince 2024

tak, aby začalo nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času; případné dotazy k textu zadání mohou být zodpovězeny v prvních 20 minutách. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. *Rozhodněte, zda existují navzájem různá reálná čísla a, b, c taková, že čísla $a^2 + b$, $b^2 + c$, $c^2 + a$ se v nějakém pořadí rovnají číslům $a + b^2$, $b + c^2$, $c + a^2$.* (Patrik Bak)

Řešení. Dokážeme, že taková čísla neexistují. V principu je $3! = 6$ možností pro sestavení soustavy tří rovnic, které mají na levých stranách součty a^2+b, b^2+c, c^2+a a na pravých stranách součty $a+b^2$, $b+c^2$, $c+a^2$ (v nějakém pořadí). Pokud by byl v některé sestavené rovnici na obou stranách tentýž kvadratický člen (například a^2), rovnaly by se zbylé dva lineární členy (b a c ve zmíněném příkladu), což zadání nedovoluje. Takže do úvahy připadají jen dvě soustavy, ve kterých jsou levé a pravé strany spárovány jako na obrázku (tečkované spojnice znázorňují páry, které nejsou přípustné; každé ze dvou spárování je určeno tím, který z možných součtů $a+b^2$, $b+c^2$ tvoří pár se součtem a^2+b).



Zbývá zjistit, zda má aspoň jedna z těchto soustav řešení (a, b, c), ve kterém jsou všechna tři čísla a, b, c různá.

(i) První soustava. Rovnici $a^2 + b = a + b^2$ jako v příkladu 1 z domácího kola upravíme na $(a - b)(a + b - 1) = 0$, takže s ohledem na $a \neq b$ musí platit $a + b = 1$. Podobně z $b^2 + c = b + c^2$ dostaneme $b + c = 1$, tudíž dohromady $a = 1 - b = c$. Soustava proto nemá žádné řešení s navzájem různými čísly a, b, c.

(ii) Druhá soustava. Z $a^2 + b = b + c^2$ plyne $a^2 = c^2$, z čehož s ohledem na $a \neq c$ plyne $c = -a$. Podobně z rovnice $b^2 + c = c + a^2$ plyne také $b = -a$. Dohromady máme $b = c$, tudíž ani tato soustava nemá řešení s požadovanou vlastností.

Poznámka. V řešení jsme vlastně ukázali, že pokud se čísla $a^2 + b$, $b^2 + c$, $c^2 + a$ v nějakém pořadí rovnají číslům $a + b^2$, $b + c^2$, $c + a^2$, pak některá dvě z čísel a, b, c musí být stejná. Snadno lze ověřit, že platí i opačná implikace – pokud se rovnají některá dvě z čísel a, b, c, pak se (v nějakém pořadí) rovnají i čísla $a^2 + b$, $b^2 + c$, $c^2 + a$ číslům $a + b^2$, $b + c^2$, $c + a^2$. (Například v případě $b = a$ jsou obě trojice tvořeny čísly $a^2 + a$, $a^2 + c$, $c^2 + a$.)

Jiné řešení. Postupujme sporem. Předpokládejme tedy, že určitá čísla a, b, c podmínky zadání splňují. Nejdříve rozebereme tři případy podle toho, čemu se rovná číslo $a^2 + b$.

(i) Případ $a^2+b = a+b^2$. Úpravou jako v prvním řešení dostaneme $(a-b)(a+b-1) = 0$, takže $a = b$ nebo $a + b = 1$. První možnost nepřipadá do úvahy, jelikož čísla a, b jsou ze zadání různá. Takže v tomto případě musí platit $a + b = 1$.

(ii) Případ $a^2+b = b+c^2$. Stejnou úpravou tentokrát dostaneme $(a-c)(a+c) = 0$. Podle zadání ovšem $a - c \neq 0$, takže v tomto případě musí platit $a + c = 0$.

(iii) Případ $a^2 + b = c + a^2$. Po úpravě $b = c$, což zadání vylučuje. Tento případ tedy nemůže nastat.

Celkově nám vyšlo, že vždy musí platit $a + b = 1$ nebo $a + c = 0$.

Podobně rozebráním případů podle toho, čemu se rovná číslo $b^2 + c$, zjistíme, že musí platit $b + c = 1$ nebo $b + a = 0$. A podobně musí také platit $c + a = 1$ nebo $c + b = 0$.

Každý ze tří součtů $a + b$, $b + c$, $c + a$ je tedy roven buď 0, nebo 1. Alespoň dva součty proto musí mít stejnou hodnotu. Bez újmy na obecnosti ať jsou to součty $a + b$ a $b + c$. Pak $a = c$, což je spor s předpokladem, že všechna tři čísla a, b, c jsou různá.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky z výše popsaných postupů následovně:

A1. Správná odpověď (i bez zdůvodnění): 1 bod.

B1. Zdůvodnění, že navzájem různá čísla a, b, c musí splňovat takovou soustavu rovnic pro všech šest daných součtů, ve které jsou buď všechny tři rovnice typu $x^2 + y = x + y^2$, nebo všechny tři rovnice typu $x^2 + y = y + z^2$: 2 body.

C1. Vyřešení soustavy, ve které jsou všechny tři rovnice typu $x^2 + y = x + y^2$: 2 body

C2. Vyřešení soustavy, ve které jsou všechny tři rovnice typu $x^2 + y = y + z^2$: 2 body

D1. Zdůvodnění, že z $x^2 + y = x + y^2$ plyne $x = y$ nebo $x + y = 1$ (lze se i odvolat na výsledek z domácího kola): 1 bod.

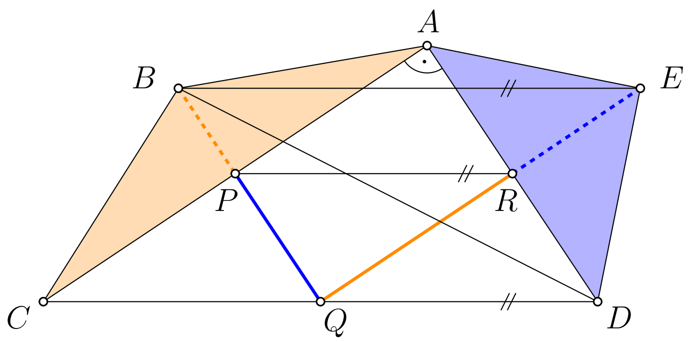
D2. Zdůvodnění, že z $x^2 + y = y + z^2$ plyne $x = z$ nebo $x = -z$: 1 bod.

Celkem pak za neúplná řešení udělte $\max(\mathrm{A1}, \mathrm{B1} + \mathrm{C1} + \mathrm{C2}, \mathrm{B1} + \mathrm{D1} + \mathrm{D2})$ bodů.

2. *Je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$ takový, že $|AB| = |BC|$, $|AE| = |DE|$, $AC \perp AD$ a $CD \parallel BE$. Dokažte, že trojúhelníky ABC a AED mají stejné obsahy.* (Patrik Bak)

Poznámka. V řešeních budeme (stejně jako v domácím kole) obsah trojúhelníku XYZ značit $[XYZ]$.

Řešení. Trojúhelník ACD má podle zadání pravý úhel u vrcholu A. Označme P, Q, R po řadě středy jeho stran AC, CD a DA. Jelikož PQ je střední příčka trojúhelníku ACD, platí $|PQ| = \frac{1}{2}|AD|$ a $PQ \parallel AD$, což s ohledem na $AD \perp AC$ znamená i $PQ \perp AC$, a proto je přímka PQ osou strany AC, na níž navíc díky podmínce $|AB| = |BC|$ leží i vrchol B. Obdobně střední příčka QR má délku $|QR| = \frac{1}{2}|AC|$ a přímka QR je osou strany AD, na níž podle zadání leží i vrchol E.



Z našich úvah plyne, že pro zkoumané obsahy trojúhelníků ABC a AED platí

$$[ABC] = \tfrac{1}{2}\,|AC| \cdot |BP| = |QR| \cdot |BP| \quad \text{a} \quad [AED] = \tfrac{1}{2}\,|AD| \cdot |RE| = |PQ| \cdot |RE|.$$

Jelikož $CD \parallel BE$ a střední příčka PR je rovnoběžná se stranou CD, platí také $PR \parallel BE$. Podle věty *uu* tak jsou trojúhelníky BQE a PQR podobné, a proto platí

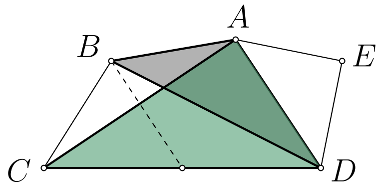
$$\frac{|BP|}{|PQ|} + 1 = \frac{|BP| + |PQ|}{|PQ|} = \frac{|BQ|}{|PQ|} = \frac{|QE|}{|QR|} = \frac{|QR| + |RE|}{|QR|} = 1 + \frac{|RE|}{|QR|}.$$

Z porovnání obou krajních výrazů plyne $|QR| \cdot |BP| = |PQ| \cdot |RE|$, což podle předchozího vede k požadované rovnosti $[ABC] = [AED]$.

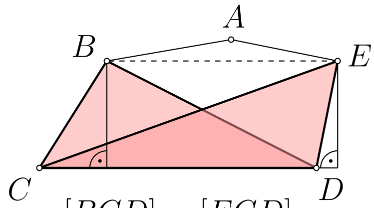
Poznámka. Úvahy o středních příčkách lze motivovat následovně. K vyjádření obsahů rovnoramenných trojúhelníků ABC a AED využijeme jejich výšky ležící na osách základen AC, resp. AD. Jsou to současně osy odvěsen pravoúhlého trojúhelníku ACD, takže se protínají ve středu kružnice jemu opsané, kterým je střed jeho přepony CD.

Jiné řešení. Stejně jako v prvním řešení si rozmyslíme, že bod B leží na přímce střední příčky trojúhelníku ACD rovnoběžné se stranou AD. Trojúhelníky ABD a ACD sdílejí stranu AD a délky příslušných výšek jsou v poměru $1:2$, takže pro obsahy trojúhelníků platí $[ABD] = \frac{1}{2}[ACD]$ (levý obrázek). Z dvojího vyjádření obsahu čtyřúhelníku $ABCD$ ve tvaru $[ABC] + [ACD] = [BCD] + [ABD]$ tak pro obsah $[ABC]$ vychází

$$[ABC] = [BCD] + \underbrace{[ABD]}_{=\frac{1}{2}[ACD]} - [ACD] = [BCD] - \tfrac{1}{2}[ACD].$$



$[ABD] = \frac{1}{2}[ACD]$



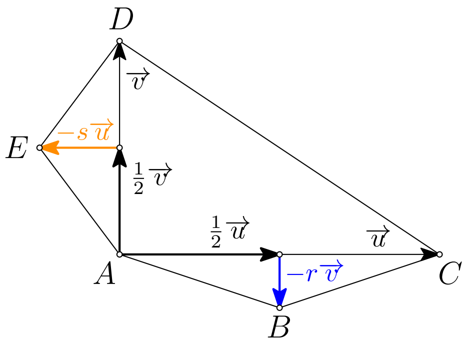
$[BCD] = [ECD]$

Zcela analogickou úvahou pro čtyřúhelník $ACDE$ odvodíme $[AED] = [ECD] - \frac{1}{2}[ACD]$. Kýžený závěr $[ABC] = [AED]$ tak bude dokázán, pokud ověříme rovnost $[BCD] = [ECD]$. Ta ovšem plyne z podmínky $CD \parallel BE$, protože trojúhelníky BCD a ECD sdílejí stranu CD a mají shodnou příslušnou výšku (pravý obrázek).

Jiné řešení. Budeme pracovat s vektory $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ a $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, které jsou podle zadání navzájem kolmé. Díky tomu pro vhodná kladná čísla r a s platí rovnosti

$$\overrightarrow{AB} = \tfrac{1}{2}\vec{u} - r\vec{v} \quad \text{a} \quad \overrightarrow{AE} = \tfrac{1}{2}\vec{v} - s\vec{u}.$$

Význam čísel r, s je jasný – v rovnoramenném trojúhelníku ABC je $r \cdot |\vec{v}|$ velikost výšky k základně AC délky $|\vec{u}|$, tudíž navíc platí $[ABC] = \frac{1}{2}r \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$. Podobně je to s významem čísla s, který vede k rovnosti $[AED] = \frac{1}{2}s \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$.



Potřebujeme tak dokázat rovnost $r = s$. Odvodíme ji ze zadané podmínky $\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{BE}$. Jelikož $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \vec{v} - \vec{u}$, upravíme vyjádření vektoru $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}$ po dosazení do pravé strany následovně:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BE} &= \left(\tfrac{1}{2}\vec{v} - s\vec{u}\right) - \left(\tfrac{1}{2}\vec{u} - r\vec{v}\right) = \left(\tfrac{1}{2} + r\right) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) + (r - s) \cdot \vec{u} = \\ &= \left(\tfrac{1}{2} + r\right) \cdot \overrightarrow{CD} + (r - s) \cdot \vec{u}.\end{aligned}$$

Vektory $\overrightarrow{BE}$ a $\overrightarrow{CD}$ jsou rovnoběžné a vektor $\vec{u}$ je s nimi různoběžný. Aby platila rovnost, musí být vektor $(r - s) \cdot \vec{u}$ nulový. Tedy $r = s$ a důkaz je hotov.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky z výše popsaných postupů následovně:

A1. Dokreslení středů alespoň dvou stran trojúhelníku ACD (body P, Q, R v prvním řešení): 1 bod.
B1. Zdůvodnění, že body B, P, Q leží na téže přímce (nebo analogicky pro E, R, Q): 2 body.
B2. Zdůvodnění, že $\triangle BQE \sim \triangle PQR$: 2 body.
C1. Zdůvodnění, že $[ABD] = \frac{1}{2}[ACD]$ (nebo analogicky pro E): 2 body.
C2. Zdůvodnění, že $[BCD] = [ECD]$: 1 bod.

Celkem pak za neúplná řešení udělte $\max(\mathrm{A1}, \mathrm{B1} + \mathrm{B2}, \mathrm{C1} + \mathrm{C2})$ bodů.

3. *Řekneme, že přirozené číslo je* ploché, *pokud jsou všechny jeho číslice stejné (i jednomístná čísla považujeme za plochá). Rozhodněte, zda lze každé přirozené číslo, které není ploché, vyjádřit jako součet několika navzájem různých plochých čísel.*

(Jozef Rajník)

Poznámka. Ano, jde to. Ukážeme dva způsoby jak zapsat řešení – první způsob je založený na takzvaném „hladovém“ algoritmu, druhý způsob využívá matematickou indukci.

Označme J_n číslo složené z n číslic 1, tedy $J_1 = 1$, $J_2 = 11$, $J_3 = 111$ atd. Potom n-místná plochá čísla jsou právě čísla $J_n, 2J_n, \ldots, 9J_n$ a nejmenší $(n+1)$-místné ploché číslo je rovno

$$\underbrace{11\ldots11}_{(n+1)\text{-krát}} = \underbrace{11\ldots1}_{n\text{-krát}}0 + 1 = 10J_n + 1.$$

Řešení. Uvažme libovolné přirozené číslo $m \geqq 1$. Máme za úkol vyjádřit m jako součet navzájem různých plochých čísel. Příhodná plochá čísla budeme hledat postupně. Nejdříve najdeme *největší* ploché číslo, které je menší nebo rovno m (aspoň jedno takové ploché číslo jistě existuje, protože $J_1 = 1$). Předpokládejme, že tímto největším číslem je dJ_k, kde $d \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Pokud $m = dJ_k$, jsme hotovi. V opačném případě zbývá vyjádřit číslo $m - dJ_k$, což uděláme analogicky tak, že najdeme největší ploché číslo, které je menší nebo rovno $m - dJ_k$, a tak dále. Čísla, které zbývá vyjádřit, nabývají nezáporných celočíselných hodnot a stále se zmenšují, takže po konečně mnoha krocích takto vyjádříme m jako součet několika plochých čísel.

Musíme ještě zdůvodnit, že takto vybraná plochá čísla jsou navzájem různá. K tomu stačí dokázat, že první vybrané číslo dJ_k splňuje $dJ_k > \frac{1}{2}m$. Pak totiž bude každé vybrané číslo ostře větší než součet všech plochých čísel vybraných později, takže speciálně budou každá dvě vybraná plochá čísla různá.

K důkazu nerovnosti $dJ_k > \frac{1}{2}m$ rozlišíme dva případy.

(i) Pokud $d \in \{1, 2, \ldots, 8\}$, pak $m < (d+1)J_k$, protože jinak bychom jako největší ploché číslo vzali číslo $(d+1)J_k$, případně nějaké ještě větší ploché číslo. Spojením se zřejmou nerovností $(d+1)J_k \leqq 2dJ_k$ dostáváme $m < (d+1)J_k \leqq 2dJ_k$, tedy $dJ_k > \frac{1}{2}m$.

(ii) Pokud $d = 9$, pak podobně jako v případu (i) platí $m < J_{k+1}$. Jelikož $J_{k+1} = 10J_k + 1 < 2 \cdot (9J_k)$, platí i $m < J_{k+1} \leqq 2 \cdot (9J_k)$, tedy $9J_k > \frac{1}{2}m$.

Tím je důkaz u konce.

Poznámka. Uvedený důkaz projde beze změny, pokud místo plochých čísel uvážíme libovolnou nekonečnou množinu přirozených čísel $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$, která obsahuje jedničku a pro kterou platí, že každé další číslo je rovno nejvýše dvojnásobku toho předchozího. Platí tedy následující tvrzení: *Ať $(a_i)_{i=1}^{\infty} = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ je nekonečná rostoucí posloupnost přirozených čísel taková, že $a_1 = 1$ a $a_{i+1} \leqq 2a_i$ pro každé $i \geqq 1$. Pak každé přirozené číslo n lze vyjádřit jako součet navzájem různých členů posloupnosti $(a_i)_{i=1}^{\infty}$.*

Jiné řešení. Pro přirozené číslo n uvažujme tvrzení $T(n)$: *Každé přirozené číslo menší než J_{n+1} lze vyjádřit jako součet několika (alespoň jednoho) navzájem různých, nejvýše n-místných plochých čísel.* Pomocí matematické indukce dokážeme, že tvrzení $T(n)$ platí pro každé přirozené číslo $n \geqq 1$. Tím bude úloha vyřešena.

Abychom dokázali platnost $T(1)$, stačí vyjádřit všechna přirozená čísla menší než $J_2 = 11$, tedy čísla $1, 2, \ldots, 10$. Čísla $1, 2, \ldots, 9$ jsou sama plochá. Číslo 10 můžeme vyjádřit například jako $10 = 9 + 1$. Tedy tvrzení $T(1)$ platí.

Předpokládejme dále, že pro nějaké přirozené číslo $n \geqq 1$ platí tvrzení $T(n)$ a dokazujme, že pak platí i tvrzení $T(n+1)$. Máme tedy vyjádřit čísla $1, 2, \ldots, J_{n+2} - 1$ pomocí navzájem různých nejvýše $(n+1)$-místných plochých čísel. Rozlišíme čtyři případy.

(i) Čísla $1, 2, \ldots, J_{n+1} - 1$ lze podle indukčního předpokladu takto vyjádřit dokonce pomocí nejvýše n-místných čísel.

(ii) Čísla $J_{n+1}, 2J_{n+1}, \ldots, 9J_{n+1}$ jsou sama plochá.

(iii) Pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ dokážeme vyjádřit každé číslo tvaru $iJ_{n+1} + z$, kde $1 \leqq z \leqq J_{n+1} - 1$, následovně: číslo z vyjádříme podle indukčního předpokladu jako součet několika navzájem různých nejvýše n-místných plochých čísel a k tomuto součtu přidáme ploché číslo iJ_{n+1}, které je různé od ostatních sčítanců, protože má $n + 1$ číslic. Tím jsme našli požadovaná vyjádření všech přirozených čísel až po číslo $9J_{n+1} + (J_{n+1} - 1) = 10J_{n+1} - 1$.

(iv) Následující číslo $10J_{n+1}$ vyjádříme například jako součet dvou různých $(n + 1)$-místných plochých čísel $10J_{n+1} = 9J_{n+1} + J_{n+1}$.

Jelikož následující číslo už je rovno $10J_{n+1} + 1 = J_{n+2}$, dokázali jsme platnost tvrzení $T(n + 1)$. Důkaz matematickou indukcí je tak hotov.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky z výše popsaných postupů následovně:

A1. Důkaz $J_{n+1} = 10J_n + 1$, kde J_n, J_{n+1} jsou nejmenší n- a $(n + 1)$-místná plochá čísla: 1 bod
A2. Uvážení největšího plochého čísla nepřevyšujícího vyjadřované číslo m: 1 bod.
B1. Popis fungujícího postupu, např. jako v prvním řešení (bez zdůvodnění jeho správnosti): 2 body.
B2. Důkaz $p_{k+1} \leqq 2p_k$, kde $(p_i)_{i=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost všech plochých čísel: 2 body
B3. Důkaz správnosti popsaného postupu (použitá čísla jsou plochá a navzájem různá): 4 body
C1. Téměř úplný důkaz indukcí, který opomíjí jen případ $m = 10J_n$: 5 bodů

Celkem pak za taková neúplná řešení udělte $\max(\mathrm{A1} + \mathrm{A2}, \mathrm{B1} + \mathrm{B2}, \mathrm{B1} + \mathrm{B3}, \mathrm{C1})$ bodů.