

## Úlohy domácího kola kategorie A

1. Předpokládejme, že pro reálná čísla  $a, b$  mají výrazy  $a^2 + b$  a  $a + b^2$  stejnou hodnotu. Jaká nejmenší může tato hodnota být? (Patrik Bak)

KOMENTÁŘ. Ukážeme, že nejmenší možná společná hodnota zadaných dvou výrazů je rovna  $-\frac{1}{4}$ . Uvedeme více řešení.

ŘEŠENÍ (sečtením výrazů). Označme  $S$  společnou hodnotu obou výrazů. Pak

$$\begin{aligned} 2S &= (a^2 + b) + (a + b^2) = (a^2 + a + \frac{1}{4}) + (b^2 + b + \frac{1}{4}) - \frac{1}{2} = \\ &= (a + \frac{1}{2})^2 + (b + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

takže  $S \geq -\frac{1}{4}$ . V použitých odhadech nastává rovnost, pokud  $a = b = -\frac{1}{2}$ . A tehdy skutečně platí, že oba výrazy mají tutéž hodnotu  $(-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$ .

POZNÁMKA. Z uvedeného sčítacího postupu dokonce plyne, že pro libovolná reálná čísla  $a, b$  platí nerovnost

$$\max(a^2 + b, b^2 + a) \geq -\frac{1}{4},$$

přičemž rovnost nastane v jediném případě, kdy  $a = b = -\frac{1}{2}$ .

JINÉ ŘEŠENÍ (odečtením výrazů). Podle zadání pro čísla  $a, b$  platí  $a^2 + b = a + b^2$ . Převedením na jednu stranu a další úpravou dostaneme

$$0 = (a^2 + b) - (a + b^2) = a^2 - b^2 - (a - b) = (a - b)(a + b - 1).$$

Musí tedy nastat (aspoň) jeden z případů  $b = a$ ,  $b = 1 - a$ .

- ▷ V prvním případě ( $b = a$ ) mají oba výrazy hodnotu  $a^2 + a$ . Doplněním na čtverec získáme

$$a^2 + a = a^2 + a + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = (a + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}.$$

Jelikož druhá mocnina reálného čísla je vždy nezáporná, minimum nastane pro  $b = a = -\frac{1}{2}$  a je rovno  $-\frac{1}{4}$ .

- ▷ Ve druhém případě dosazením  $b = 1 - a$  do obou výrazů zjistíme, že mají hodnotu  $a^2 + (1 - a)$ , což podobně jako v prvním případě upravíme pomocí doplnění na čtverec:

$$a^2 - a + 1 = a^2 - a + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = (a - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}.$$

Minimum je v tomto případě  $\frac{3}{4}$ , což je více než  $-\frac{1}{4}$ .

KOMENTÁŘ. Místo doplnění na čtverec lze využít známých vlastností kvadratické funkce: Jak víme, v případě kladného koeficientu  $\alpha$  funkce  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  nabývá minima pro  $x = -\beta/(2\alpha)$  a toto minimum se rovná  $-\beta^2/(4\alpha) + \gamma$ . Například v prvním případě výše jde o funkci  $f(a) = 1 \cdot a^2 + 1 \cdot a + 0$ , tedy  $\alpha = \beta = 1$  a  $\gamma = 0$ . Její minimum je proto  $-1/4$  a nastává pro  $a = -1/2$ .

## NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Pro různá reálná čísla  $a, b$  mají výrazy  $a^2 - b^2$  a  $a - b$  stejnou hodnotu. Dokažte, že hodnota  $a + b$  je 1. [Ze zadání  $a^2 - b^2 = a - b$ , po vydělení nenulovým výrazem  $a - b$  dostáváme  $a + b = 1$ .]

N2. Jaké nejmenší hodnoty může pro reálné číslo  $a$  nabývat výraz  $a^2 + 3a$ ? [Upravíme

$$a^2 + 3a = \left(a + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \geq -\frac{9}{4},$$

nejmenší hodnota je tedy  $-\frac{9}{4}$ , kterou výraz nabývá pro  $a = -\frac{3}{2}$ .]

N3. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic  $a^2 + b = c$ ,  $b^2 + c = a$ ,  $c^2 + a = b$ . [Po sečtení rovnic dostaneme  $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ , tedy  $a = b = c = 0$ . Zkouškou, která je zde nutná, se snadno přesvědčíme, že  $a = b = c = 0$  je skutečně i řešením původní soustavy.]

D1. Předpokládejme, že pro reálná čísla  $a_1, \dots, a_n$  mají výrazy  $a_1^2 + a_2$ ,  $a_2^2 + a_3, \dots, a_{n-1}^2 + a_n$  a  $a_n^2 + a_1$  stejnou hodnotu. Jaká nejmenší může tato hodnota být? [Označme společnou hodnotu  $S$ , pak sečtením podobně jako ve vzorovém řešení získáme odhad

$$n \cdot S = (a_1^2 + a_2) + \dots + (a_n^2 + a_1) = \left(a_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(a_n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{n}{4} \geq -\frac{n}{4},$$

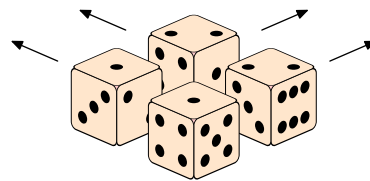
tedy  $S \geq -\frac{1}{4}$  a rovnost opět nastává pro  $a_1 = \dots = a_n = -\frac{1}{2}$ .]

D2. Pro nenulová reálná čísla  $a, b, c$  platí  $a^2(b+c) = b^2(c+a) = c^2(a+b)$ . Určete všechny možné hodnoty výrazu  $(a+b+c)^2/(a^2+b^2+c^2)$ . [B-73-S-3]

D3. Pro reálná čísla  $x$  a  $y$  platí  $x^3 + y^3 \leq 2$ . Dokažte, že pak rovněž  $x + y \leq 2$ . [B-57-1-3]

D4. Necht  $a, b, c$  jsou přirozená čísla. Ukažte, že všechna tři čísla  $a^2 + b + c$ ,  $b^2 + c + a$ ,  $c^2 + a + b$  nemohou být zároveň druhé mocniny celých čísel. [APMO-2011-P1]

2. Martin k sobě přikládá hrací kostky (stejné velikosti  $i$  rozmístěním čísel) tak, aby byly vyskládané do tvaru čtverce libovolné velikosti a aby vždy na dvou přiléhajících bočních stěnách byla táž čísla. Kolik nejvíce různých čísel se může vyskytnout na horních stěnách kostek?

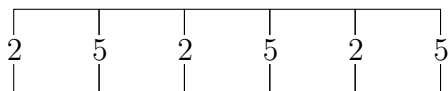


(Martin Panák, Josef Tkadlec)

ŘEŠENÍ. Odpověď: Nejvýše 4 různá čísla.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že kostky jsou očíslované jako na obrázku v zadání, tj. že čísla 1, 2, 3 jsou na sousedních stěnách ve směru chodu hodinových ručiček a že na každých dvou navzájem protějších stěnách jsou čísla se součtem 7.

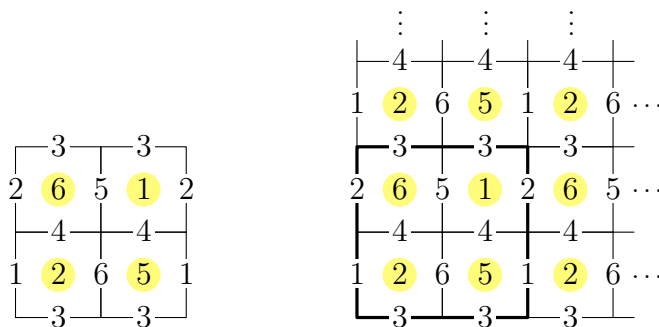
Pro  $x \in \{1, 2, 3\}$  budeme  $x$ -řádkem nazývat řádek čtverce, jehož první kostka zleva má na levé stěně číslo  $x$  nebo  $7-x$ . Podobně budeme  $x$ -sloupcem rozumět sloupec čtverce, jehož první kostka zepředu má na přední stěně číslo  $x$  nebo  $7-x$ . Všimněme si, že na stěnách kostek  $x$ -řádku, resp.  $x$ -sloupce, které jsou kolmé na jeho podélnou osu, se střídají čísla  $x$  a  $7-x$ . Na obrázku je příklad 2-řádku.



Dále si všimněme, že pokud se v celé sestavě vyskytne nějaký  $x$ -řádek, nemůže se v ní vyskytovat žádný  $x$ -sloupec, protože kostka v tomto řádku a tomto sloupci by měla dvě stěny s číslem  $x$ . Rozebereme teď dva případy:

- ▷ Pokud existuje  $x \in \{1, 2, 3\}$  takové, že všechny řádky jsou  $x$ -řádky, pak se na horních stěnách kostek nevyskytují čísla  $x$  ani  $7-x$ , takže jsou tam nejvýše 4 různá čísla.
- ▷ V opačném případě existují různá  $y, z \in \{1, 2, 3\}$  taková, že některý řádek je  $y$ -řádek a některý řádek je  $z$ -řádek. Žádný sloupec proto není  $y$ -sloupec ani  $z$ -sloupec, takže všechny sloupce jsou  $w$ -sloupce, kde  $w$  je takové, že  $\{y, z, w\} = \{1, 2, 3\}$ . To znamená, že na horních stěnách kostek se nevyskytují čísla  $w$  a  $7-w$ , takže i v tomto případě jsou tam nejvýše 4 různá čísla.

Zbývá uvést příklad čtverce kostek, v němž se na horních stěnách vyskytují 4 různá čísla. Jeden možný příklad je na obrázku vlevo (podbarvená čísla jsou ta na horních stěnách).



POZNÁMKA. Není obtížné si rozmyslet, že dokonce pro každé  $n \geq 2$  lze  $n^2$  kostek uspořádat do čtverce  $n \times n$  tak, aby se na horních stěnách vyskytovala 4 různá čísla. Například lze kostky vyskládat jako na obrázku vpravo tak, aby řádky byly střídavě 1- a 2-řádky s počátečními čísly 1, resp. 2 a všechny sloupce byly 3-sloupce s počátečními čísly 3. Na horních stěnách v lichých řádcích se pak budou střídát čísla 2 a 5 a v sudých řádcích čísla 6 a 1.

#### NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

V úlohách o skládání kostek předpokládáme, že na k sobě přiléhajících stěnách kostek jsou vždy dvě stejná čísla.

- N1. Místo do čtverce skládáme kostky do řady. Kolik nejvíce různých čísel se může vyskytnout na horních stěnách kostek? [Nejvýše 4. V řadě kostek se na přiléhajících stěnách střídají jen dvě čísla, žádné z nich proto nemůže být na horní stěně. Zbýlá čtyři čísla na horních stěnách být mohou.]
- N2. Kostky skládáme do čtverce (tj. do kvádrů tvaru  $n \times n \times 1$ ). Může se na dvou sousedních bočních stěnách čtverce (tj. na sousedních stěnách  $n \times 1$  složeného kvádrů) objevit číslo 1? [Nemůže. V řadě kostek se na přiléhajících stěnách střídají jen dvě čísla, takže všechny kostky v řadě, která má číslo 1 na boční stěně, budou mít číslo 1 pouze na stěnách s ní rovnoběžných. Pokud by také někde na sousední boční stěně bylo číslo 1, musela by je nějaká kostka mít na dvou svých stěnách, což je vyloučeno.]
- D1. Z kostek jsme poskládali krychli  $3 \times 3 \times 3$ . Určete možné hodnoty součtů všech 54 viditelných čísel za předpokladu, že každá kostka má na protějších stěnách čísla se součtem 7. [Součet je vždy roven  $27 \cdot 7 = 189$ . Jelikož jsou v každé řadě tři kostky za sebou, viditelná čísla na jejích koncích mají stejně jako na jedné kostce součet 7. Těchto dvojic je 27, proto je odpověď  $27 \cdot 7 = 189$ . (Krychli skutečně poskládat lze.)]
- D2. Čtvercová tabulka  $10 \times 10$  je vyplněna písmeny  $A, B, C, D$  tak, že každá podtabulka  $2 \times 2$  obsahuje každé ze čtyř písmen jednou. Dokažte, že existuje řádek nebo sloupec, který obsahuje právě dvě různá písmena. [Ukažte, že pokud jsou v některém řádku aspoň tři různá písmena, pak v něm někde tři různá leží vedle sebe, řekněme v pořadí  $\dots ABC \dots$ . V řádku pod i nad nimi musí být tři písmena  $\dots CDA \dots$ . Zopakováním tohoto argumentu potom vyjde, že v uvedených třech sloupcích (a dokonce ve všech sloupcích) musí být jen dvě různá písmena.]
- D3. Určete nejmenší možné  $n$ , pro které lze dovnitř krychle  $2020 \times 2020 \times 2020$  umístit  $n$  kvádrů  $2020 \times 1 \times 1$  tak, aby každý kvádr měl stěny rovnoběžné se stěnami krychle, žádné dva kvádry se neprotínaly (dotýkat se mohou) a aby se každá ze čtyř obdélníkových stěn každého kvádrů dotýkala buď jině obdélníkové stěny jiného kvádrů nebo některé stěny celé krychle. [USAMO–2020–P2]

3. Na tabuli jsou napsána navzájem různá přirozená čísla se součtem 2024. Každé z nich kromě nejmenšího je násobkem součtu všech menších napsaných čísel. Kolik nejvíce čísel může na tabuli být? (Patrik Bak)

ŘEŠENÍ. Ukážeme, že na tabuli může být nejvýše 6 čísel.

Označme čísla na tabuli postupně  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  a pro každé  $k = 1, \dots, n$  označme  $s_k = a_1 + \dots + a_k$  součet nejmenších  $k$  z nich. Ze zadání víme, že  $s_n = 2024$ . Navíc pro každé  $k = 1, \dots, n-1$  platí\*  $s_k \mid a_{k+1}$ , a tedy platí i  $s_k \mid a_{k+1} + s_k = s_{k+1}$ . Posloupnost  $(s_1, s_2, \dots, s_n = 2024)$  je proto posloupností kladných dělitelů čísla 2024, z nichž každý další dělitel je násobkem toho předchozího.

Jelikož pro každé  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  je číslo  $s_{k+1}$  násobkem čísla  $s_k$  (a je ostře větší než  $s_k$ ), musí číslo  $s_{k+1}$  ve svém rozkladu na prvočinitele obsahovat alespoň jednoho prvočinitele navíc oproti rozkladu čísla  $s_k$ .

Číslo  $2024 = 45^2 - 1 = 44 \cdot 46 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$  obsahuje ve svém rozkladu 5 prvočinitelů, takže v posloupnosti  $s_1, s_2, \dots$  se může vyskytnout nejpozději na šestém místě. Tento případ  $s_6 = 2024$  přitom nastane právě tehdy, pokud součet  $s_1$  nemá žádného prvočinitele, tedy  $s_1 = 1$ , a pokud každý další součet  $s_{k+1}$  má právě o jednoho prvočinitele více než předchozí součet  $s_k$ .

Zbývá dokázat, že 6 čísel na tabuli být může. Odpovídající příklad zkonstruujeme pomocí úvah výše. Za posloupnost součtů můžeme vzít například  $(s_1, s_2, \dots, s_6) = (1, 11, 22, 44, 88, 2024)$ . Tomu odpovídá posloupnost čísel

$$(a_1, a_2, \dots, a_6) = (s_1, s_2 - s_1, s_3 - s_2, \dots, s_6 - s_5) = (1, 10, 11, 22, 44, 1936),$$

která skutečně vyhovuje zadání.

POZNÁMKA. Existuje celkem osm vyhovujících příkladů šesti čísel

$$\begin{array}{ll} (1, 10, 11, 22, 44, 1936), & (1, 22, 23, 46, 92, 1840), \\ (1, 10, 11, 22, 968, 1012), & (1, 22, 23, 46, 920, 1012), \\ (1, 10, 11, 484, 506, 1012), & (1, 22, 23, 460, 506, 1012), \\ (1, 10, 242, 253, 506, 1012), & (1, 22, 230, 253, 506, 1012). \end{array}$$

Tyto šestice vzniknou ze všech výše popsaných posloupností dělitelů

$$s_1 = 1, \quad s_2 \in \{11, 23\}, \quad s_3 \in \{22, 46, 253\}, \quad \dots, \quad s_6 = 2024,$$

kde (pouze) případy  $s_2 = 2$  jsou vyloučeny, neboť obě čísla  $a_1, a_2$  by pak byla rovna 1. (Do levého, resp. pravého sloupce jsme vypsali ty šestice, pro něž  $s_2 = 11$ , resp.  $s_2 = 23$ .)

JINÉ ŘEŠENÍ. Uvedeme další způsob jak dokázat, že čísel může být nejvýše šest.

Jako v prvním řešení označme čísla na tabuli  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ . Postupujme od menších čísel k větším a násobky zmíněné v textu úlohy vyjadřujme pomocí přirozených čísel  $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ .

▷ Ze zadání je  $a_2$  násobkem  $a_1$ , platí proto  $a_2 = k_1 \cdot a_1$  pro vhodné  $k_1$ .

\* Jako obvykle zápis  $d \mid m$  značí, že číslo  $d$  je dělitelem čísla  $m$ .

- ▷ Ze zadání je  $a_3$  násobkem součtu  $a_1 + a_2 = a_1 + k_1 a_1 = (1 + k_1)a_1$ , platí proto  $a_3 = k_2(1 + k_1)a_1$  pro vhodné  $k_2$ .
- ▷ Ze zadání je  $a_4$  násobkem součtu

$$(a_1 + a_2) + a_3 = (1 + k_1)a_1 + k_2(1 + k_1)a_1 = (1 + k_2)(1 + k_1)a_1,$$

platí proto  $a_4 = k_3(1 + k_2)(1 + k_1)a_1$  pro vhodné  $k_3$ .

Těmito výpočty se postupně dostaneme až k součtu všech  $n$  napsaných čísel:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = (1 + k_{n-1})(1 + k_{n-2}) \dots (1 + k_2)(1 + k_1)a_1.$$

Každá z  $n - 1$  závorek na pravé straně je celé číslo větší než 1. Zároveň levá strana je ze zadání rovna 2024, což je, jak už víme, číslo s pěti prvočiniteli. Závorek na pravé straně může být proto nejvýše 5, tedy  $n - 1 \leq 5$  čili  $n \leq 6$ , jak jsme slíbili dokázat.

#### NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

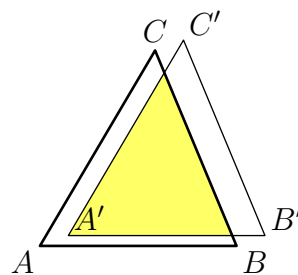
- N1. Najděte všechny dvojice různých přirozených čísel, v nichž větší číslo je násobkem toho menšího a jejich součet je 74. [Vyhovují dvojice (1,73) a (2,72). Označíme-li hledaná čísla  $a$  a  $k \cdot a$ , kde  $k \geq 2$  je celé, pak  $74 = a + ka = a(k + 1)$ , přičemž  $k + 1 \geq 3$ , takže  $k + 1$  je dělitelem čísla  $74 = 2 \cdot 37$  větším než 3, tedy je to buď 37 nebo 74.]
- N2. Jakou největší délku může mít rostoucí posloupnost kladných celých čísel, ve které je každý člen násobkem předchozího a poslední člen je roven 1000? [7. Každý další člen musí mít v rozkladu na prvočinitele aspoň jednoho prvočinitele navíc oproti předchozímu členu. Jelikož číslo  $1000 = 10^3 = 2^3 \cdot 5^3$  má 6 prvočinitelů, může být celkem členů až 7 (první člen totiž může být 1).]
- D1. Najděte všechna přirozená čísla  $n$ , pro která platí rovnost

$$n + d(n) + d(d(n)) + \dots = 2021,$$

kde  $d(0) = d(1) = 0$  a pro  $k > 1$  je  $d(k)$  superdělitel čísla  $k$  (tj. jeho největší dělitel  $d$  s vlastností  $d < k$ ). [MO-70-A-III-4]

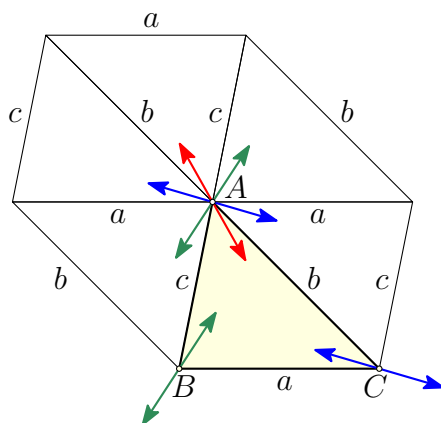
- D2. O lichém prvočísle  $p$  řekneme, že je speciální, pokud součet všech prvočísel menších než  $p$  je násobkem  $p$ . Existují dvě po sobě jdoucí prvočísla, která jsou speciální? [MO-73-A-I-4]
- D3. Najděte všechna celá čísla  $n \geq 3$  s následující vlastností: pokud seřadíme dělitele čísla  $n!$  vzestupně jako  $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n!$ , potom platí  $d_2 - d_1 \leq d_3 - d_2 \leq \dots \leq d_k - d_{k-1}$ . [USAMO-2024-P1]
- D4. Určete všechna složená čísla  $n > 1$  s následující vlastností: pokud seřadíme dělitele čísla  $n$  vzestupně jako  $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$ , potom  $d_i$  je dělitelem součtu  $d_{i+1} + d_{i+2}$  pro každé  $1 \leq i \leq k - 2$ . [IMO-2023-P1]

4. Pro trojúhelník  $ABC$  platí  $|AB| = 13$ ,  $|BC| = 14$ ,  $|CA| = 15$ . Jeho posunutím o vektor délky 1 vznikne trojúhelník  $A'B'C'$ . Určete nejmenší možný obsah průniku trojúhelníků  $ABC$  a  $A'B'C'$ . (Tomáš Bárta)

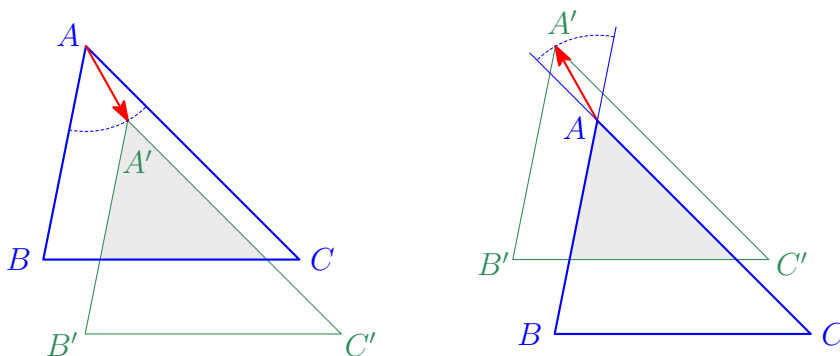


ŘEŠENÍ. Ukážeme, že nejmenší možný obsah je  $7803/112 \doteq 69,67$ .

V celém řešení budeme využívat toho, že daný trojúhelník  $ABC$  je ostroúhlý a že kterákoli jeho výška je větší než zadaná délka posunutí (rovná 1); tato (intuitivně zřejmá) tvrzení ověříme až na úplném konci přímým výpočtem.

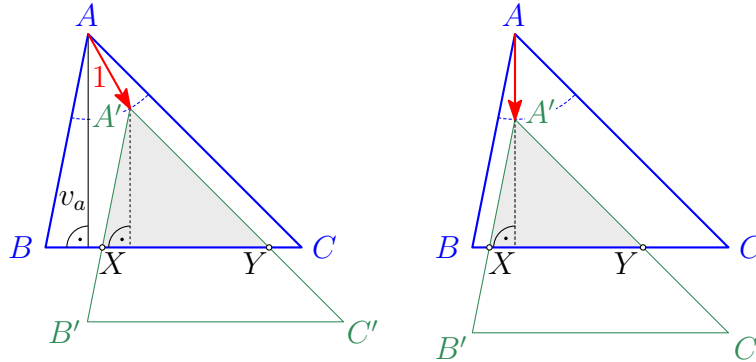


Na úvodním obrázku vidíme šestiúhelník složený z šesti kopií téhož trojúhelníku  $ABC$  o stranách délek  $|BC| = a$ ,  $|CA| = b$ ,  $|AB| = c$ . Podle vykreslených vektorů je patrné, že ať vybereme vektor posunutí jakkoli, vždy bude ležet buď v některém vnitřním úhlu trojúhelníku  $ABC$ , nebo v úhlu k němu vrcholovém, pokud tento vektor umístíme do vhodně zvoleného vrcholu trojúhelníku  $ABC$  (červené vektory do vrcholu  $A$ , zelené do vrcholu  $B$  a modré do vrcholu  $C$ ). Případem vrcholových úhlů se nemusíme zabývat, protože (jak ilustruje následující dvojice obrázků) výsledný průnik dvou trojúhelníků se nezmění, pokud namísto posouvání původního trojúhelníku  $ABC$  o daný vektor posuneme výsledný trojúhelník  $A'B'C'$  o vektor k němu opačný.



Zaměříme se teď na případ, kdy vektor posunutí  $AA'$  (zadané délky 1) leží v úhlu  $BAC$  (zbývající případy, kdy  $BB'$  leží v úhlu  $ABC$ , resp. kdy  $CC'$  leží v úhlu  $BCA$ ,

nebudou o nic těžší). Jelikož platí  $v_a > 1$  (kde  $v_a$  značí jako obvykle výšku z vrcholu  $A$  v trojúhelníku  $ABC$ ), průnikem trojúhelníků  $ABC$  a  $A'B'C'$  bude trojúhelník  $A'XY$ , kde  $X$  a  $Y$  jsou ty body na straně  $BC$ , pro které platí  $A'X \parallel AB$  a  $A'Y \parallel AC$  (viz další obrázek vlevo).



Díky rovnoběžnostem stran je trojúhelník  $A'XY$  podobný trojúhelníku  $ABC$ , a má proto nejmenší možný obsah právě tehdy, když má nejkratší možnou výšku z vrcholu  $A'$ . Jelikož trojúhelník  $ABC$  je ostroúhlý, je tato výška nejkratší, když vektor posunutí  $AA'$  je kolmý ke straně  $BC$ . Tehdy je výška z vrcholu  $A'$  v trojúhelníku  $A'XY$  rovna  $v_a - 1$  (viz obrázek vpravo). Trojúhelníky  $A'XY$  a  $ABC$  jsou tudíž podobné s koeficientem podobnosti  $\frac{v_a-1}{v_a}$ , a tak pro nejmenší možný obsah průniku v uvažovaném případě dostáváme hodnotu

$$S_{ABC} \cdot \left(\frac{v_a-1}{v_a}\right)^2 = S_{ABC} \cdot \left(1 - \frac{1}{v_a}\right)^2.$$

Podobně v případech, kdy v trojúhelníku  $ABC$  leží vektor  $BB'$ , resp. vektor  $CC'$ , dostaneme pro nejmenší možnou hodnotu obsahu průniku vyjádření

$$S_{ABC} \cdot \left(1 - \frac{1}{v_b}\right)^2, \quad \text{resp.} \quad S_{ABC} \cdot \left(1 - \frac{1}{v_c}\right)^2.$$

Z nerovností  $|AB| < |BC| < |CA|$  zřejmě plyne  $v_c > v_a > v_b$ , a proto nejmenší z nalezených tří minimálních hodnot je hodnota  $S_{ABC} \cdot \left(1 - \frac{1}{v_b}\right)^2$ .

Zbývá vypočítat  $S_{ABC}$  a  $v_b$ . Podle Heronova vzorce (viz poznámku pod čarou) platí

$$S_{ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

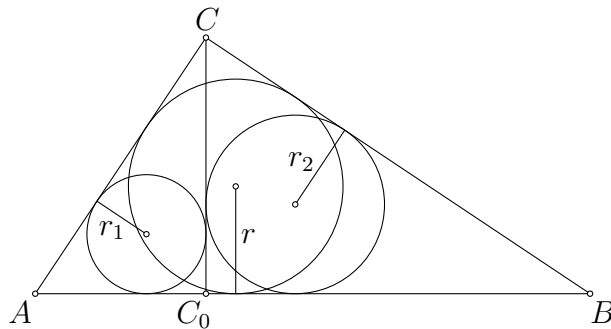
kde  $s = \frac{1}{2}(a+b+c) = 21$  je polovina obvodu trojúhelníku  $ABC$ . Po dosazení získáme  $S_{ABC} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$ . Ze vztahu  $S_{ABC} = \frac{1}{2}b \cdot v_b$  pak dostáváme  $v_b = \frac{2 \cdot 84}{15} = \frac{56}{5}$ . Tím jsme také ověřili, že nejkratší výška  $v_b$  je delší než 1. To, že trojúhelník je ostroúhlý, plyne z nerovnosti  $15^2 < 13^2 + 14^2$  (díky kosinové větě  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$  pak proti nejdelší straně  $b$  leží úhel  $\beta$ , jehož kosinus je kladný). Závěrem dopočteme

$$S_{ABC} \cdot \left(1 - \frac{1}{v_b}\right)^2 = 84 \cdot \left(\frac{51}{56}\right)^2 = \frac{7803}{112} \doteq 69,67.$$



## NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Uvnitř trojúhelníku  $ABC$  na jeho střední příčce rovnoběžné se stranou  $BC$  je dán bod  $P$ . Rovnoběžky se stranami  $AB$ ,  $AC$  vedené bodem  $P$  protnou stranu  $BC$  postupně v bodech  $Q$ ,  $R$ . Dokažte, že obsah trojúhelníku  $PQR$  je roven čtvrtině obsahu trojúhelníku  $ABC$ . [Trojúhelníky  $PQR$  a  $ABC$  mají rovnoběžné strany, takže jsou podobné. Výška ke straně  $QR$  má poloviční délku nežli výška ke straně  $BC$ , takže koeficient podobnosti je  $1/2$ . Obsah trojúhelníku  $PQR$  je proto roven  $(1/2)^2 = 1/4$  obsahu trojúhelníku  $ABC$ .]
- N2. Spočítejte obsah trojúhelníku se stranami délek  $a = 5$ ,  $b = 6$ ,  $c = 7$ . [ $6\sqrt{6} \doteq 14,7$ . Stačí dosadit do Heronova vzorce\*  $S_{ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ , kde  $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$  je polovina obvodu. Vyjde  $s = 9$  a  $S_{ABC} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 6\sqrt{6}$ . Případně lze postupovat také následovně: Z kosinové věty  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$  plyne  $\cos \gamma = (a^2 + b^2 - c^2)/(2ab) = 1/5$ , takže  $\sin \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} = 2\sqrt{6}/5$  a  $S_{ABC} = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = 6\sqrt{6}$ . (Zmíněný Heronův vzorec lze odvodit podobně jako v uvedeném výpočtu pomocí úprav  $S^2 = \frac{1}{4}a^2b^2(1 - \cos^2 \gamma) = \frac{1}{4}a^2b^2(1 + \cos \gamma) \cdot (1 - \cos \gamma) = \frac{1}{16}((a+b)^2 - c^2)(c^2 - (a-b)^2)$ .)]
- D1. Určete *největší* možný obsah průniku trojúhelníků  $ABC$  a  $A'B'C'$ . [Vyjde  $84 \cdot (14/15)^2 = 5488/75 \doteq 73,17$ . Ukažte, že maximum nastane, pokud bude vektor posunutí rovnoběžný s některou ze stran trojúhelníků. Příslušný koeficient podobnosti pak bude  $12/13$ ,  $13/14$  nebo  $14/15$ , přičemž maximum dává právě poslední z nich.]
- D2. Pro daná kladná čísla  $a$  a  $d$  platí  $d < a \leq 4d$ . Posunutím čtverce  $ABCD$  o straně délky  $a$  o libovolný vektor délky  $d$  vznikne čtverec  $A'B'C'D'$ . Určete nejmenší možný a také největší možný obsah průniku čtverců  $ABCD$  a  $A'B'C'D'$ . [Minimum je  $a(a-d)$ , maximum je  $(a - d/\sqrt{2})^2$ . Průnikem je totiž obdélník o obsahu  $S = (a-x)(a-y)$ , kde nezáporná čísla  $x, y$  jsou délky kolmých průmětů vektoru posunutí na přímky  $AB$ ,  $AD$ . Pro součet  $s = x + y$  zřejmě platí  $s \geq d$  a také  $s \leq d\sqrt{2}$ , neboť  $x^2 + y^2 = d^2$  a  $(x+y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$ . Užitím rovnosti  $xy = \frac{1}{2}(x+y)^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}d^2$  zapíšeme obsah  $S$  jako funkci součtu  $s$ :  $S(s) = a^2 - (x+y)a + xy = \frac{1}{2}s^2 - as + a^2 - \frac{1}{2}d^2$ . To je kvadratická funkce s minimem v bodě  $\frac{1}{4}a$ , který leží díky předpokladu  $a \leq 4d$  nalevo od intervalu  $\langle d, d\sqrt{2} \rangle$  se všemi možnými hodnotami  $s$ . Zbývá využít toho, že na tomto intervalu je uvažovaná funkce rostoucí a že hodnoty  $s = d$  a  $s = d\sqrt{2}$  jsou dosažitelné.]
- D3. V pravoúhlém trojúhelníku  $ABC$  označme  $CC_0$  výšku k přeponě  $AB$  a dále označme  $r, r_1, r_2$  postupně poloměry kružnic vepsaných trojúhelníkům  $ABC, ACC_0, BCC_0$ . Dokažte, že  $r_1^2 + r_2^2 = r^2$ .



[Trojúhelníky  $ABC, ACC_0$  a  $BCC_0$  jsou navzájem podobné, takže existuje reálné číslo  $x$  takové, že  $r = x \cdot |AB|$ ,  $r_1 = x \cdot |AC|$ ,  $r_2 = x \cdot |BC|$ . Dokazovaná rovnost je tudíž  $x^2$ -násobkem rovnosti z Pythagorovy věty pro  $\triangle ABC$ .]

- D4. V pravoúhlém trojúhelníku s vepsanou kružnicí o poloměru  $r$  má výška k přeponě velikost  $v$ . Dokažte nerovnosti

$$0,4 < \frac{r}{v} < 0,5.$$

\* O tomto proslulém vzorci se více dočtete v článku *J. Blažek: Čtyři důkazy Heronova vzorce*.

[S. Horák: Nerovnosti v trojúhelníku, ŠMM sv. 57, příklad 25, str. 50–52.]

- D5. Je dán lichoběžník  $ABCD$  se základnami  $AB$  a  $CD$ . Označme  $k_1$  a  $k_2$  kružnice s průměry  $BC$  a  $AD$ . Dále označme  $P$  průsečík přímk  $BC$  a  $AD$ . Dokažte, že tečny z bodu  $P$  ke kružnici  $k_1$  svírají stejný úhel jako tečny z bodu  $P$  ke kružnici  $k_2$ . [MO–71–A–I–2]
- D6. Dokažte, že pro libovolný trojúhelník  $T$  o obsahu 1 existuje přímka  $p$ , pro kterou má průnik trojúhelníku  $T$  a jeho obrazu v osové souměrnosti podle přímky  $p$  obsah větší než  $\frac{3}{4}$ . [Z trojúhelníkové nerovnosti lze odvodit, že v každém trojúhelníku existují dvě strany, pro jejichž délky  $a, b$  platí  $1 \leq a/b < \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ . Pokud za  $p$  zvolíme osu úhlu mezi těmito stranami, vyjde průnik o obsahu alespoň  $3 - \sqrt{5} \doteq 0,764$ , viz také [USAMO–1996–P3](#). Komplikovanějším způsobem lze dokázat, že vhodnou volbou přímky  $p$  lze zajistit průnik o obsahu dokonce alespoň  $2\sqrt{2} - 2 \doteq 0,828$ , tuto konstantu navíc nelze zlepšit, viz [Wikipedia](#).]

5. Saba se snaží z přízemí nekonečně vysokého mrakodrapu dostat do  $n$ -tého patra pomocí zvláštního výtahu. Ve výtahu jsou tlačítka  $0, 1, 2, \dots$ . Po prvním stisknutí tlačítka pojedou výtah nahoru a po každém dalším jede vždy opačným směrem, než posledně, přičemž po stisknutí tlačítka  $k$  popojede vždy o  $2^k$  pater. Navíc každé další stisknuté tlačítko musí mít menší číslo než to předešlé. Dokažte, že Saba se do každého patra  $n \geq 1$  může dostat právě dvěma různými postupy. (Morteza Saghafian)

ŘEŠENÍ. Označme  $t$  první tlačítko, které Saba stiskne. Pro  $t \in \{0, 1, 2, 3\}$  můžeme vypsat všechny možné postupy, které může Saba použít, a patra, ve kterých skončí. Dostaneme následující seznam (při daném  $t$  postupy uspořádáme podle počtu užitých tlačítek):

$$t = 0: \quad 2^0 = \mathbf{1}.$$

$$t = 1: \quad 2^1 = \mathbf{2}, \quad 2^1 - 2^0 = \mathbf{1}.$$

$$t = 2: \quad 2^2 = \mathbf{4}, \quad 2^2 - 2^1 = \mathbf{2}, \quad 2^2 - 2^1 + 2^0 = \mathbf{3},$$

$$2^2 - 2^0 = \mathbf{3},$$

$$t = 3: \quad 2^3 = \mathbf{8}, \quad 2^3 - 2^2 = \mathbf{4}, \quad 2^3 - 2^2 + 2^1 = \mathbf{6},$$

$$2^3 - 2^1 = \mathbf{6}, \quad 2^3 - 2^2 + 2^0 = \mathbf{5}, \quad 2^3 - 2^2 + 2^1 - 2^0 = \mathbf{5},$$

$$2^3 - 2^0 = \mathbf{7}, \quad 2^3 - 2^1 + 2^0 = \mathbf{7},$$

Tyto „malé“ případy nás mohou vést k domněnce, že pro každé přirozené  $t$  platí následující tvrzení:

*Pokud Saba použije jen tlačítka menší nebo rovna  $t$ , může se dostat do každého z pater  $1, 2, \dots, 2^t - 1$  právě dvěma způsoby a dále jen do patra  $2^t$  právě jedním způsobem.*

Poté, co domněnku dokážeme, úloha bude zřejmě vyřešena.

K důkazu domněnky použijeme matematickou indukci. Pro nejmenší hodnoty  $t \in \{1, 2, 3\}$  jsme tvrzení ověřili výše.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro nějaké pevné  $t \geq 3$ , a dokažme, že pak platí i pro  $t + 1$ . K tomu uvážíme všechny postupy, kdy Saba použije jen tlačítka menší nebo rovna  $t + 1$ . Rozlišíme je podle toho, jestli používají tlačítko  $t + 1$  a jestli kromě něj používají i nějaké jiné tlačítko.

- Pomocí postupů, které tlačítko  $t + 1$  nepoužívají, se podle indukčního předpokladu Saba dostane do každého z pater  $1, 2, \dots, 2^t - 1$  právě dvěma způsoby a navíc do patra  $2^t$  právě jedním způsobem.
- Pokud Saba stiskne tlačítko  $t + 1$  a po něm ještě aspoň jedno další, po prvním stisku bude následovat libovolný z postupů vyhodnocených výše. Při něm se ovšem na rozdíl od původního postupu otočí všechny směry chodu výtahu, takže pokud původní postup vedl do patra  $p$ , nový postup povede do patra  $2^{t+1} - p$ . Pomocí všech těchto nových postupů se tak Saba může dostat do každého z pater

$$2^{t+1} - 1, \quad 2^{t+1} - 2, \quad \dots, \quad 2^{t+1} - (2^t - 1) = 2^t + 1$$

právě dvěma způsoby a navíc do patra  $2^{t+1} - 2^t = 2^t$  právě jedním způsobem.

- Pokud Saba stiskne jen tlačítko  $t + 1$ , dostane se do patra  $2^{t+1}$ .

Celkem jsme dokázali, že Saba se může dostat právě dvěma způsoby do každého z pater  $1, 2, \dots, 2^t - 1$  (případ a),  $2^t$  (případy a, b),  $2^t + 1, 2^t + 2, \dots, 2^{t+1} - 1$  (případ b) a navíc právě jedním způsobem do patra  $2^{t+1}$  (případ c). Tím je důkaz matematickou indukcí hotov.

POZNÁMKA. Možných domněnek, které lze odpozorovat a následně dokázat matematickou indukcí, je více. Například: *Pokud Saba začne stisknutím tlačítka  $t \geq 1$ , může se dostat do každého ze dvou pater  $2^{t-1}, 2^t$  právě jedním způsobem a navíc do každého z „mezipater“  $2^{t-1} + 1, \dots, 2^t - 1$  právě dvěma způsoby.*

JINÉ ŘEŠENÍ. V tomto řešení budeme pracovat se zápisy čísel ve dvojkové soustavě. Například číslo 58 lze zapsat jako

$$58 = 32 + 16 + 8 + 2 = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^1 = (111010)_2.$$

Při práci se zápisem čísla ve dvojkové soustavě číslujeme pozice zprava postupně od 0, tj. zde bychom řekli, že číslo 58 má ve dvojkovém zápisu jedničky na pozicích 1, 3, 4, 5 (které odpovídají sčítancům  $2^1, 2^3, 2^4, 2^5$ ) a nuly na pozicích 0, 2 (které odpovídají chybějícím sčítancům  $2^0, 2^2$ ). Dodejme dobře známý fakt, že každé přirozené číslo má ve dvojkové soustavě jednoznačný zápis (viz řešení návodné úlohy N2).

Zpátky k úloze. Nejdřív rozeberme případ, kdy Saba stiskne dohromady *sudý* počet tlačítek, tedy po posledním stisknutí výtah pojedje dolů. Konkrétně po stisknutí  $2k$  tlačítek postupně s čísly

$$a_1 > b_1 > a_2 > b_2 > \dots > a_k > b_k$$

skončí výtah v patře s číslem  $n = (2^{a_1} - 2^{b_1}) + (2^{a_2} - 2^{b_2}) + \dots + (2^{a_k} - 2^{b_k})$ . Podívejme se na zápis tohoto čísla ve dvojkové soustavě. Pro rozdíl v každé závorce platí

$$2^{a_i} - 2^{b_i} = 2^{a_i-1} + 2^{a_i-2} + \dots + 2^{b_i},$$

takže jde o číslo, které má ve dvojkové soustavě jedničky právě na pozicích  $b_i$  až  $a_i - 1$ . V zápise výsledného součtu  $n$  tak všechny jedničky vytvoří  $k$  souvislých úseků s pozicemi

$$(a_1 - 1, \dots, b_1), (a_2 - 1, \dots, b_2), \dots, (a_k - 1, \dots, b_k),$$

přítom každé dva tyto sousední úseky budou odděleny aspoň jednou nulou, neboť mezi pozicemi  $b_i$  a  $a_{i+1} - 1$  je vždy aspoň pozice  $a_{i+1}$ . Pokud tedy Saba má stisknout sudý počet tlačítek, může se do daného patra  $n \geq 1$  dostat vždy právě jedním způsobem: číslo  $n$  zapíše ve dvojkové soustavě, v zápisu najde co nejdelší souvislé úseky jedniček, označí je zleva po řadě  $(a_i - 1, \dots, b_i)$  pro  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  a postupně stiskne tlačítka  $a_1, b_1, \dots, a_k, b_k$ . Například pro patro  $58 = (111010)_2$  takto najde dva úseky

$$(a_1 - 1 = 5, 4, 3 = b_1), (a_2 - 1 = 1 = b_2),$$

a pak postupem  $(a_1, b_1, a_2, b_2) = (6, 3, 2, 1)$  se skutečně dostane do patra  $2^6 - 2^3 + 2^2 - 2^1 = 58$ .

Podobně ve druhém případě, kdy Saba stiskne *lichý* počet tlačítek, řekněme s čísly

$$a_1 > b_1 > a_2 > b_2 > \dots > a_k > b_k > a_{k+1},$$

skončí v patře s číslem  $n = \sum_{i=1}^k (2^{a_i} - 2^{b_i}) + 2^{a_{k+1}}$ , které má v dvojkové soustavě jedničky na úsecích pozic  $(a_i - 1, \dots, b_i)$  a na pozici  $a_{k+1}$  (všude jinde má nuly, zejména aspoň jednu mezi každými dvěma sousedními úseky jedniček z prvních  $k$  úseků). Každé  $n \geq 1$  lze v uvedeném tvaru zapsat právě jedním způsobem – jako  $a_{k+1}$  musí Saba zvolit pozici první jedničky zprava v dvojkovém zápisu čísla  $n$ , tuto jedničku přepíše na nulu a dále už postupuje jako výše v případě sudého počtu tlačítek. I zde je tedy právě jeden možný postup. Například pro patro  $58 = (111010)_2$  Saba přepíše na nulu jedničku na pozici 1, najde jediný úsek jedniček  $(a_1 - 1 = 5, 4, 3 = b_1)$ , takže bude  $k = 1$  a  $a_{k+1} = 1$ , a pak se postupem  $(a_1, b_1, a_2) = (6, 3, 1)$  skutečně dostane do patra  $2^6 - 2^3 + 2^1 = 58$ .

POZNÁMKA. Z podaného řešení, které jsme založili na užití dvojkové soustavy, plyne, že dva možné postupy, jakými se Saba dostane do patra s daným číslem  $n$ , končí stiskem téhož tlačítka  $a$ , jednou pro pohyb o  $2^a$  pater nahoru, podruhé pro takový pohyb dolů. Navíc platí, že  $2^a$  je největší mocnina dvojky, která dané číslo  $n$  dělí. Odtud plyne, že oba postupy pro dané  $n$  lze postupně konstruovat „odzadu“, aniž předem určíme dvojkový zápis čísla  $n$ . Například pro číslo  $n = 58$ , které je dělitelné  $2^1$ , ne však  $2^2$ , celá konstrukce pro lichý počet stisků tlačítek (poslední pohyb bude o  $2^1$  pater nahoru) bude vypadat takto

$$58, 58 - 2^1 = 56, 56 + 2^3 = 64, 64 - 2^6 = 0;$$

pro sudý počet stisků tlačítek bude mít tvar

$$58, 58 + 2^1 = 60, 60 - 2^2 = 56, 56 + 2^3 = 64, 64 - 2^6 = 0.$$

Hledané skupiny tlačítek tedy jsou  $(6, 3, 1)$  a  $(6, 3, 2, 1)$ .

Dodejme, že tuto poznámku nelze považovat za úplné řešení – například by ještě bylo potřeba zdůvodnit, že

- ▷ použitím uvedeného postupu „odzadu“ nikdy nezajedeme do podzemí a že
- ▷ po konečně mnoha krocích skutečně dojedeme do přízemí.

První tvrzení lze zdůvodnit například tak, že z kteréhokoliv patra s kladným číslem  $2^i \cdot l$ , kde  $l$  je liché číslo, popojedeme jen o  $2^i$  pater, tedy skončíme v patře s číslem alespoň  $2^i \cdot l - 2^i \geq 2^i - 2^i \geq 0$ . Druhé tvrzení lze zdůvodnit různými způsoby – například lze indukcí dokázat, že pokud začínáme konstrukci odzadu v patře  $n$  a platí  $n < 2^k$ , pak nikdy nenavštívíme patro s číslem větším než  $2^k$ . Z toho pak vyplývá požadované tvrzení. Jelikož totiž v každém kroku popojedeme o více pater než v předchozím kroku, po konečném počtu kroků takto dojedeme buď do přízemí nebo do patra s číslem  $2^k$  (a z něj následně do přízemí).

#### NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Kam (a kolika postupy) se Saba může dostat, pokud ve výtahu budou jen tlačítka 0, 1, 2?  
[Pokud prvně stiskne tlačítko 2, může se dostat do pater  $4 = 2^2$ ,  $3 = 2^2 - 2^0$ ,  $2 = 2^2 - 2^1$ ,  $3 = 2^2 - 2^1 + 2^0$ . Jinak se může dostat do pater  $2 = 2^1$ ,  $1 = 2^1 - 2^0$  a  $1 = 2^0$ . Celkově se do patra 4 může dostat jedním postupem a do pater 1, 2 a 3 dvěma postupy.]
- N2. Dokažte, že pokud výtah nemění směr (tedy jezdí pouze nahoru), může se Saba do každého patra  $n \geq 1$  dostat právě jedním postupem. [Máme dokázat, že každé  $n \geq 1$  lze vyjádřit právě jedním způsobem jako součet různých celočíselných mocnin dvojky. Toto tvrzení je známé jako jednoznačnost zápisu ve dvojkové soustavě. Načrtne důkaz matematickou indukcí: Stačí dokázat, že pro každé  $k \geq 1$  má  $2^{k+1}$  podmnožin množiny

$\{2^0, 2^1, \dots, 2^k\}$  navzájem různé součty prvků, a to čísla od 0 po  $2^{k+1} - 1$ . Pro  $k = 1$  tvrzení platí. Předpokládejme, že tvrzení platí pro  $k - 1$ . Podmnožiny, které neobsahují prvek  $2^k$ , mají podle předpokladu součty  $0, \dots, 2^k - 1$ . Podmnožiny, které prvek  $2^k$  obsahují, mají součty o  $2^k$  větší, tedy  $2^k + 0, \dots, 2^k + 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$ . ]

- N3. Dokažte, že (kladný) rozdíl dvou různých mocnin dvojky lze vyjádřit jako součet několika po sobě jdoucích mocnin dvojky (jedné nebo více). [Pro každá dvě přirozená čísla  $a > b$  platí  $2^a - 2^b = 2^b + 2^{b+1} + \dots + 2^{a-1}$ , jak snadno ověříme přičtením  $2^b$  k oběma stranám a opakovaným využitím vztahu  $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ .]
- D1. Máme rovnoramenné váhy a 4 závaží, která můžeme pokládat na misky vah. a) Najděte příklad sady 4 závaží, pomocí které můžeme odměřit každou celočíselnou váhu od 1 po 15, pokud máme dovoleno pokládat závaží jen na levou misku vah. b) Najděte příklad sady 4 závaží, pomocí které můžeme odměřit každou celočíselnou váhu od 1 po 40, pokud máme dovoleno pokládat závaží na obě misky vah. [a) Jedna taková sada je  $\{1, 2, 4, 8\}$ . b) Jedna taková sada je  $\{1, 3, 9, 27\}$ .]
- D2. Dokažte, že každé přirozené číslo  $n$  lze vyjádřit právě jedním způsobem jako

$$n = c_1 \cdot 1! + c_2 \cdot 2! + c_3 \cdot 3! + \dots + c_k \cdot k!,$$

kde  $k \geq 1$  a  $0 \leq c_i \leq i$  pro každé  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , přitom  $c_k \neq 0$ . [Jde o vyjádření čísla  $n$  v tzv. faktoriálové soustavě (viz [Wikipedia](#)). Nejprve dokážeme pro každé přirozené  $m$  pomocnou rovnost  $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + m \cdot m! = (m + 1)! - 1$  - stačí buď v součtu  $(2 - 1) \cdot 1! + (3 - 1) \cdot 2! + \dots + ((m + 1) - 1) \cdot m!$  roznásobit závorky a výsledek zjednodušit, nebo užít matematickou indukci. Tu ale hlavně využijeme k důkazu tvrzení ze zadání vlastní úlohy D2: Pro  $n = 1$  tvrzení zřejmě platí; platí-li pro všechna  $n'$  menší než dané číslo  $n > 1$ , najdeme k němu nejprve jednoznačně určená přirozená čísla  $k$  a  $c$ , kde  $c \leq k$ , taková, že  $c \cdot k! \leq n < (c + 1) \cdot k!$ . Z pomocné rovnosti pro  $m = k$  plyne, že nalezené  $k$  je právě to, které musí být v každém vyjádření  $n$  ze zadání D2 a že navíc v něm musí platit  $c_k = c$ ; z indukčního předpokladu pro  $n' = n - c \cdot k! < n$  pak dostáváme i jednoznačně určené koeficienty  $c_i$  s indexy  $i < k$ , neboť  $n' < k!$  (několik posledních z těchto koeficientů mohou být nuly, v případě  $n' = 0$  to jsou dokonce samé nuly).]

- D3. Je dáno celé číslo  $z < -1$ . Dokažte, že jakékoli nenulové celé číslo  $n$  má vyjádření

$$n = c_k z^k + c_{k-1} z^{k-1} + \dots + c_1 z + c_0,$$

kde  $k \geq 0$  a  $c_k, c_{k-1}, \dots, c_1, c_0$  jsou celá čísla z množiny  $\{0, 1, \dots, |z| - 1\}$ . Ukažte rovněž, že za podmínky  $c_k \neq 0$  je takové vyjádření daného  $n$  jediné. (V případě  $z = -2$  se jedná o vyjádření čísla  $n$  v „minusdvojkové“ soustavě. Poziční soustavy se zápornými základy našly praktická uplatnění i z důvodu, že i záporná čísla jsou v nich zapisována bez znaménka, například  $-7 = (1001)_{-2}$ . Viz také [Wikipedia](#).) [Využijte toho, že čísla  $c_0, c_1, c_2, \dots$  lze postupně určit kongruencemi

$$c_0 \equiv n \pmod{|z|}, \quad c_1 \equiv \frac{n - c_0}{z} \pmod{|z|}, \quad c_2 \equiv \frac{n - c_0 - c_1 z}{z^2} \pmod{|z|}, \dots ]$$

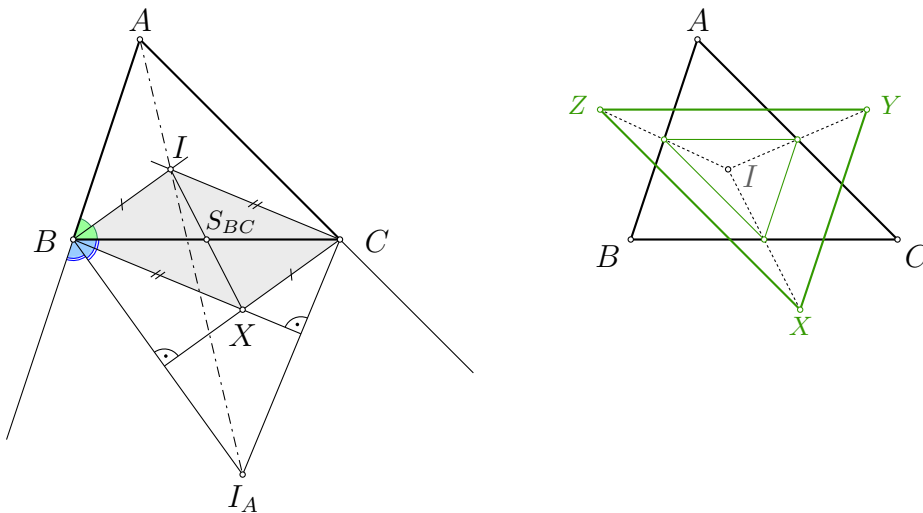
- D4. Fibonacciho čísla  $F_n$  jsou definována jako  $F_1 = F_2 = 1$  a  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  pro každé  $n \geq 3$ . Dokažte, že každé přirozené číslo lze vyjádřit jako součet jednoho nebo více navzájem různých Fibonacciho čísel tak, že tento součet neobsahuje žádná dvě po sobě jdoucí Fibonacciho čísla. Dále dokažte, že bez použití  $F_1$  je dokonce toto vyjádření jednoznačné. [Zeckendorfova věta ([Wikipedia](#))]
- D5. Beruška Blanka sedí v rovině s kartézskou soustavou souřadnic a začne skákat rovnoběžně se souřadnicovými osami tak, že v  $n$ -té minutě pro každé přirozené číslo  $n$  skočí právě jednou, a to v některém ze čtyř možných směrů s délkou skoku rovnou Fibonaccimu číslu  $F_n$  (definovaném v D4). Předpokládejme, že první dva Blančiny skoky byly navzájem kolmé. Dokažte, že se Blanka už nikdy nemůže vrátit tam, odkud začala skákat. [[ICMC-6.1-P3](#)]

6. Označme  $I_A, I_B, I_C$  po řadě středy kružnic připsaných stranám  $BC, CA, AB$  trojúhelníku  $ABC$ . Průsečíky výšek trojúhelníků  $I_A BC, AI_B C, ABI_C$  označme po řadě  $X, Y, Z$ . Dokažte, že trojúhelníky  $ABC$  a  $XYZ$  jsou shodné. (Michal Janík)

ŘEŠENÍ. Označme  $I$  střed kružnice vepsané trojúhelníku  $ABC$ . Přímkou  $BI, BI_A$  jsou osami vnitřního a vnějšího úhlu při vrcholu  $B$  trojúhelníku  $ABC$ . V této roli to jsou dvě navzájem kolmé přímky, neboť při obvyklém označení  $\beta = |\sphericalangle ABC|$  platí

$$|\sphericalangle IBI_A| = |\sphericalangle IBC| + |\sphericalangle CBI_A| = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}(180^\circ - \beta) = 90^\circ.$$

Ke zmíněné přímce  $BI_A$  je ovšem také kolmá přímka  $CX$  výšky z vrcholu  $C$  trojúhelníku  $I_A BC$ . Dohromady vychází, že přímky  $BI$  a  $CX$  jsou rovnoběžné. Podobně jsou rovnoběžné přímky  $CI$  a  $BX$ , tudíž podbarvený čtyřúhelník  $BICX$  je rovnoběžník.

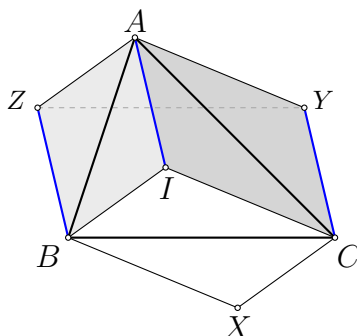


Úhlopříčky každého rovnoběžníku se navzájem půlí, takže střed úsečky  $IX$  splývá se středem  $S_{BC}$  strany  $BC$ . Analogicky středy úseček  $IY, IZ$  splývají po řadě se středy  $S_{CA}, S_{AB}$  stran  $CA, AB$  trojúhelníku  $ABC$ . Trojúhelník  $XYZ$  je proto obrazem tzv. *příčkového* trojúhelníku  $S_{BC}S_{CA}S_{AB}$  ve stejnolehlosti se středem  $I$  a koeficientem 2. Jelikož příčkový trojúhelník  $S_{BC}S_{CA}S_{AB}$  je podobný trojúhelníku  $ABC$  s koeficientem podobnosti  $1/2$ , je (dvakrát větší) trojúhelník  $XYZ$  s trojúhelníkem  $ABC$  shodný.

JINÉ ŘEŠENÍ. Ukážeme jiný způsob jak dokončit řešení po zjištění, že čtyřúhelník  $BICX$  je rovnoběžník.

Analogicky jako v prvním řešení se dokáže, že i čtyřúhelníky  $CIAY$  a  $AIBZ$  jsou rovnoběžníky. Úsečky  $BZ$  a  $CY$  jsou tedy shodné a rovnoběžné (každá z nich je totiž shodná a rovnoběžná s úsečkou  $IA$ ). Čtyřúhelník  $BCYZ$  je tudíž rovnoběžník, a proto platí  $|BC| = |YZ|$ . Obdobně dokážeme i rovnosti  $|CA| = |ZX|$  a  $|AB| = |XY|$ , takže celkově jsou trojúhelníky  $ABC$  a  $XYZ$  shodné podle věty *sss*.

JINÉ ŘEŠENÍ. Ukážeme ještě trochu náročnější způsob jak odvodit, že střed úsečky  $IX$  splývá se středem  $S_{BC}$  úsečky  $BC$ . Zkombinujeme v něm dvě zajímavá tvrzení z doplňujících úloh D1 a D2.



Zkoumejme, jaký vztah má bod  $I$  k trojúhelníku  $I_A BC$ . Z doplňující úlohy D1 plyne, že úsečka  $I_A I$  je průměrem kružnice opsané trojúhelníku  $I_A BC$  (tj. bod  $I$  je „naproti“ vrcholu  $I_A$  na této kružnici). Díky tomu z doplňující úlohy D2 plyne, že bod  $I$  je obrazem průsečíku výšek  $X$  trojúhelníku  $I_A BC$  v souměrnosti podle středu jeho strany  $BC$ .

#### NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

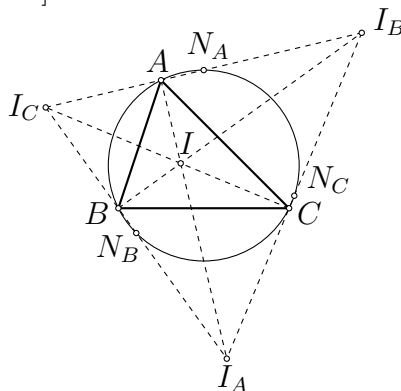
- N1. Dokažte, že v trojúhelníku  $ABC$  je osa vnějšího úhlu u vrcholu  $A$  kolmá k ose vnitřního úhlu u vrcholu  $A$ . [Součet velikostí vnitřního a vnějšího úhlu u jednoho vrcholu trojúhelníku je  $180^\circ$ . Součet jejich polovin je proto  $90^\circ$ .]
- N2. Dokažte, že trojúhelník tvořený středními příčkami daného trojúhelníku je mu podobný. [Jelikož střední příčka trojúhelníku je rovnoběžná se základnou a má oproti ní poloviční délku, je podle věty *sss* příčkový trojúhelník podobný celému trojúhelníku s koeficientem podobnosti  $1/2$ . Jiný postup: Z vlastnosti těžnic plyne, že příčkový trojúhelník je obrazem původního trojúhelníku ve stejnolehlosti s koeficientem  $-1/2$ .]
- N3. Uvnitř šestiúhelníku  $ABCDEF$  leží bod  $P$  tak, že čtyřúhelníky  $ABCP$ ,  $CDEP$  a  $EFAP$  jsou rovnoběžníky. Dokažte, že trojúhelníky  $ACE$  a  $DFB$  jsou shodné. [Jelikož jsou čtyřúhelníky  $ABCP$  a  $CDEP$  rovnoběžníky, jsou úsečky  $AB$ ,  $CP$  a  $DE$  rovnoběžné a shodné. Proto je i čtyřúhelník  $ABDE$  rovnoběžník, tedy úsečky  $AE$  a  $DB$  jsou shodné. Analogicky jsou shodné i úsečky  $CE$  s  $FB$  a úsečky  $AC$  s  $DF$ , což dohromady podle věty *sss* už znamená shodnost trojúhelníků  $ACE$  a  $DFB$ .]

V doplňujících úlohách používáme značení ze zadání soutěžní úlohy.

- D1. Dokažte, že úsečka  $I_A I$  je průměrem kružnice opsané trojúhelníku  $I_A BC$ . [Podle N1 platí  $|\sphericalangle IBI_A| = 90^\circ = |\sphericalangle ICI_A|$ .]
- D2. V trojúhelníku  $ABC$  označme  $H$  průsečík výšek,  $M$  střed strany  $BC$  a  $H'$  obraz bodu  $H$  ve středové souměrnosti podle bodu  $M$ . Dokažte, že úsečka  $AH'$  je průměrem kružnice opsané trojúhelníku  $ABC$ . [Přímka  $BH'$  je obrazem přímky  $CH$  ve středové souměrnosti podle bodu  $M$ , proto jsou tyto přímky rovnoběžné. Jelikož přímka  $CH$  je kolmá ke straně  $AB$ , je úhel  $ABH'$  pravý. Analogicky je pravý i úhel  $ACH'$ , tedy skutečně body  $B$ ,  $C$  leží na kružnici nad průměrem  $AH'$ .]
- D3. Označme  $S_{AB}$ ,  $S_{BC}$ ,  $S_{CA}$  středy stran  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  trojúhelníku  $ABC$ . Dokažte, že se přímky  $AX$ ,  $BY$  a  $CZ$  protínají v jednom bodě, a to ve středu kružnice vepsané příčkovému trojúhelníku  $S_{BC}S_{CA}S_{AB}$  trojúhelníku  $ABC$ . [Označme  $J$  střed kružnice vepsané trojúhelníku  $S_{BC}S_{CA}S_{AB}$ . Stačí dokázat, že  $J$  je střed strany  $AX$  trojúhelníku  $AIX$ . Z řešení původní úlohy víme, že  $BICX$  je rovnoběžník, tedy  $S_{BC}$  je středem úsečky  $IX$ . Stejnolehlost s koeficientem  $-1/2$ , která zobrazí  $\triangle ABC$  na  $\triangle S_{BC}S_{CA}S_{AB}$ , zobrazí úsečku  $AI$  na úsečku  $S_{BC}J$ , takže  $\overrightarrow{S_{BC}J} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IA}$ . Jelikož  $S_{BC}$  je středem strany  $IX$  trojúhelníku  $AIX$ , je  $S_{BC}J$  jeho střední příčka a bod  $J$  je tak středem jeho strany  $AX$ .]
- D4. a) Dokažte, že střed  $I$  kružnice vepsané trojúhelníku  $ABC$  je současně průsečíkem výšek trojúhelníku  $I_A I_B I_C$ . b) Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku  $ABC$  je současně



Feuerbachovou kružnicí\* trojúhelníku  $I_A I_B I_C$ . c) Dokažte, že středy oblouků  $ABC$ ,  $BCA$ ,  $CAB$  kružnice opsané trojúhelníku  $ABC$  jsou současně středy stran trojúhelníku  $I_A I_B I_C$ . [a) Např. přímky  $I_B I_C$  a  $I_A I$  jsou navzájem kolmé podle úlohy N1, protože jsou to osy vnějšího a vnitřního úhlu u vrcholu  $A$ . b) Podle části a) jsou totiž body  $A$ ,  $B$ ,  $C$  patami výšek v  $\triangle I_A I_B I_C$ . c) Střed  $N_A$  úsečky  $I_B I_C$  je podle Thaletovy věty středem kružnice opsané tětíivovému čtyřúhelníku  $BC I_B I_C$ , takže platí  $|N_A B| = |N_A C|$  a  $|\sphericalangle B N_A C| = 2 \cdot |\sphericalangle B I_B C| = 2 \cdot |\sphericalangle I A C| = |\sphericalangle B A C|$ , kde předposlední rovnost platí díky tomu, že čtyřúhelník  $A I C I_B$  je tětíivový (opět Thaletova věta). Bod  $N_A$  je proto skutečně středem oblouku  $BAC$ .]



- D5. V trojúhelníku  $ABC$  splňujícím  $|AB| < |AC|$  označme  $M$  střed strany  $BC$ ,  $N$  střed oblouku  $BAC$  kružnice opsané a  $I$  střed kružnice vepsané. Dokažte, že  $|\sphericalangle IMB| = |\sphericalangle INA|$ . [Označme  $I_B$ ,  $I_C$  středy kružnic připsaných postupně stranám  $AC$  a  $AB$ . Čtyřúhelník  $BC I_B I_C$  je tětíivový (Thaletova věta), takže  $\triangle BIC \sim \triangle I_C I I_B$  (věta  $uu$ ). Podle úlohy D4 je bod  $N$  středem úsečky  $I_B I_C$ . Úsečky  $IM$ ,  $IN$  jsou proto odpovídající si těžnice v podobných trojúhelnících  $\triangle BIC$  a  $\triangle I_C I I_B$ , tudíž podobné jsou i jejich „poloviny“ – trojúhelníky  $IMB$  a  $INI_C$ . Odtud už  $|\sphericalangle IMB| = |\sphericalangle INI_C| = |\sphericalangle INA|$ .]

\* Feuerbachova kružnice daného trojúhelníku je kružnice procházející mj. středy jeho stran a patami jeho výšek. Viz *S. Horák: Kružnice, ŠMM sv. 16, str. 78–80.*