Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z8

Z8–I–1

Ivan, Jarek, Kája a Luboš mají dohromady 90 známek. Kdyby měl Ivan o dvě známky méně, Jarek o dvě více, Kája dvojnásobek a Luboš polovinu toho, co nyní, měli by všichni stejně.

Kolik známek má každý z chlapců? *(L. Hozová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Alice, Božena a Daniela sbírají mušle, dohromady jich mají 34. Kdyby měla Alice o dvě méně, Božena o tři více a Daniela o třetinu méně toho, co nyní, měly by všechny stejně. Kolik mušlí má každá z dívek?

N2. Při oslavě 39. narozenin paní Záhadové se jí kamarádka zeptala na věk jejích tří dětí. Paní Záhadová odpověděla: „Když sečtu věk nejstaršího s polovinou věku nejmladšího a čtvrtinou věku prostředního, dostanu třetinu věku svého.“ Kolik let mohlo být jejím dětem? Uveďte všechny možnosti.

N3. Sourozenci Adam a Eva chodí na základní školu, Adam je o dva roky mladší než Eva. Když k trojnásobku Evina věku přičetli 5 a výsledek vydělili věkem Adama, vyšlo jim stejné číslo jako počet babiččiných koček. Kolik koček měla babička?

D1. Kamarádi Jarda, Přemek a Robin hráli kuličky. Jardovi se moc nedařilo, takže po hře měl nejméně kuliček ze všech. Klukům to bylo líto, proto dal Robin Jardovi polovinu všech svých kuliček a Přemek třetinu svých. Teď měl nejvíc kuliček Jarda, a tak svým kamarádům vrátil po sedmi kuličkách. Po těchto výměnách měli všichni stejně, a to 25 kuliček. Kolik kuliček měl po hře (před výměnami) Jarda?

Z8–I–2

Sestrojte rovnoramenný trojúhelník se základnou délky 12 cm a výškou k základně velikosti 18 cm. Rozdělte trojúhelník na tři lichoběžníky o stejném obsahu. *(L. Dedková)*

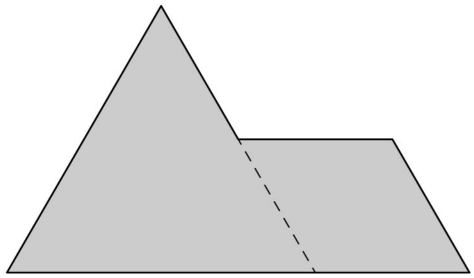
Návodné a doplňující úlohy

N1. Trojúhelník ze soutěžní úlohy rozdělte na čtyři shodné trojúhelníky. Zobecněte svoje řešení pro jiné počty trojúhelníků.

N2. Trojúhelník ze soutěžní úlohy rozdělte na čtyři trojúhelníky, které nejsou shodné, ale mají shodný obsah. Zobecněte svoje řešení pro jiné počty trojúhelníků.

N3. Rozdělte pravidelný šestiúhelník na tři shodné kosočtverce.

D1. Klára měla čtyři shodné dílky z tvrdého papíru, které jí připomínaly sfingu. Každý dílek byl slepen z rovnostranného trojúhelníku se stranou délky 6 cm a kosočtverce se stranou délky 3 cm. Klára tyto čtyři dílky přikládala k sobě, až se jí povedlo složit podobný, ovšem větší tvar sfingy. Nakreslete, jak to mohla udělat. (Dílky se nepřekrývaly, nebyly nijak ohnuté, avšak mohly být překlopené spodní stěnou nahoru.)



Z8–I–3

Pro čísla a, b, c, d platí:

- *číslo a dává po dělení třemi zbytek 1,*
- *číslo b dává po dělení šesti zbytek 2,*
- $a - b = d - c$,
- *číslo d je dělitelné třemi.*

Jaký zbytek po dělení devíti může dávat číslo c? Najděte všechny možnosti.
(E. Semerádová)

Návodné a doplňující úlohy

N1. Najděte všechna přirozená čísla menší než 30, která po dělení třemi dávají zbytek 2. Jaké zbytky dávají tato čísla po dělení šesti? A jaké po dělení devíti?

N2. Jsou dána čísla $a = 2024$ a $b = 111$. Jaké zbytky po dělení třemi, čtyřmi a pěti dávají čísla a, b, jejich součet $a + b$ a rozdíl $a - b$?

N3. Moje oblíbené číslo je součtem čísla, které po dělení čtyřmi dává zbytek 1, a čísla, které po dělení osmi dává zbytek 3. Jaké zbytky mohou vyjít po dělení mého oblíbeného čísla osmi?

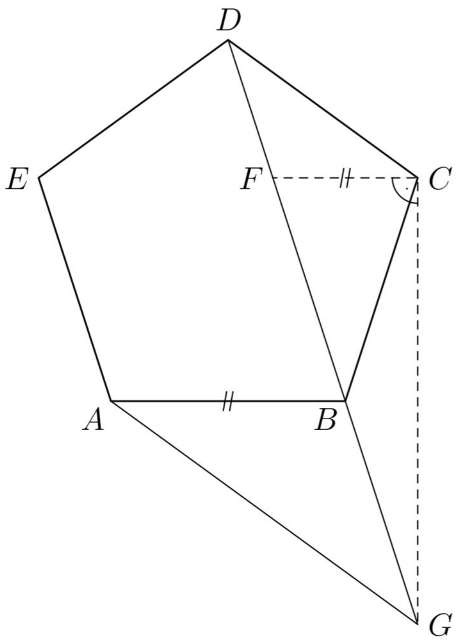
D1. Najděte všechna dvojciferná čísla, která jsou dělitelná čtyřmi, po dělení šesti dávají zbytek 2 a po dělení pěti dávají zbytek 3.

D2. Jaký zbytek po dělení třemi dává součet prvních 2024 přirozených čísel?

Z8–I–4

Je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Rovnoběžka s přímkou AB procházející bodem C protíná přímku BD v bodě F. Kolmice k přímce CF procházející bodem C protíná přímku BD v bodě G.

Určete velikost úhlu AGF. *(P. Bak)*



Návodné a doplňující úlohy

N1. V pravidelném pětiúhelníku $ABCDE$ je bod P průsečíkem přímek AC a BE. Určete velikost úhlu EPC.

N2. V pravidelném šestiúhelníku $ABCDEF$ je bod Q průsečíkem přímek FD a AE. Určete velikost úhlu AQD.

N3. V pravidelném šestiúhelníku $ABCDEF$ je bod R průsečíkem přímek FA a BD. Určete velikosti úhlů ARB a RBC.

D1. V pravidelném 180-úhelníku $A_1A_2 \ldots A_{180}$ je bod V průsečíkem přímek A_1A_3 a A_2A_4. Určete velikosti úhlů $A_1A_3A_2$ a A_1VA_4.

Z8–I–5

Podíl nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele čísel a a b je 75. Součet čísel a a b je větší než 100 a menší než 200.

Určete všechny možné dvojice čísel a a b s uvedenými vlastnostmi. *(E. Semerádová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Určete všechny dvojice jednomístných čísel, které mají jednomístný nejmenší společný násobek.

N2. Určete všechny dvojice čísel, pro které je součin jejich nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele roven 75.

N3. Pro čísla $a = 60$, $b = 48$ určete jejich největší společný dělitel D, nejmenší společný násobek N a ověřte, že platí $a \cdot b = D \cdot N$. Rozhodněte, zda obdobný vztah platí pro libovolná čísla a, b.

N4. Podíl nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele čísel a a b je 6. Součet čísel a a b je menší než 20. Určete všechny možné dvojice čísel a a b s uvedenými vlastnostmi.

D1. Podíl nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele navzájem různých čísel a, b a c je 30. Součet každých dvou čísel z této trojice je větší než 10 a menší než 30. Určete všechny možné trojice čísel a, b, c s uvedenými vlastnostmi.

Z8–I–6

Rybář Štika chytil několik ryb. Když prodal tři nejtlustší ryby majiteli místní restaurace, snížil celkovou hmotnost svého úlovku o 35 %. Když dal tři nejhubenější ryby svému psovi, snížil hmotnost zbývajících ulovených ryb o pět třináctin.

Kolik ryb chytil pan Štika? *(L. Hozová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Rybář Kapr choval ve svém rybníku cejny. Na jaře přikoupil polovinu množství cejnů, které v rybníku měl, a k tomu dostal 20 cejnů od majitele vedlejšího rybníku. Na podzim po výlovu zůstalo v rybníce 182 cejnů, což bylo o 30 procent cejnů méně než po jarním navýšení chovu. Kolik cejnů měl pan Kapr na začátku?

N2. Štika prohání a pojídá ryby v rybníce. V úterý a ve středu snědla o čtvrtinu více ryb než předchozí den, ve čtvrtek a v pátek snědla o 20 % více ryb než předchozí den a v pátek snědla 36 ryb. Kolik ryb snědla štika v pondělí? Který den měla snědeno právě polovinu všech ryb, které spořádala od pondělí do pátku?

N3. Rybář Cejn ulovil 15 ryb a vzal je všechny na trh. Každá z těchto ryb vážila alespoň 500 gramů, ale žádná nevážila více než 3 kilogramy. Během dne si lidé kupovali velké ryby a večer šel rybář domů s nejmenšími kousky ze svého úlovku. Dohromady neprodané ryby vážily pětinu toho, co ranní úlovek. Kolik nejméně a kolik nejvíce ryb pan Cejn prodal?

D1. Do prodejny vína se v noci vloupal kocour. Vyskočil na polici, na níž byly v dlouhé řadě vyrovnány lahve s vínem. První třetina lahví zkraje stála po 160 Kč, následující třetina lahví stála po 130 Kč a poslední třetina po 100 Kč. Nejprve kocour shodil na zem lahev za 160 Kč, která stála úplně na začátku řady. Pak postupoval dále a shazoval bez vynechání jednu lahev za druhou. Než ho to přestalo bavit, srazil 25 lahví a ty se všechny rozbily. Ráno majitel zalitoval, že kocour nezačal se svým řáděním na druhém okraji police. I kdyby totiž rozbil stejný počet lahví, byla by škoda o 660 Kč menší. Kolik lahví bylo původně na polici?