Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z9

Z9–I–1

Najděte všechny dvojice celých čísel x a y takových, že $x + y$ je prvočíslo a $3x + 5y$ je 16. *(P. Bak)*

Návodné a doplňující úlohy

V řešeních lze s výhodou použít následující charakterizaci dělitelnosti přirozených čísel: Číslo d dělí číslo a, právě když pro nějaké přirozené číslo k platí $a = k \cdot d$.

N1. Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla a, b, d platí:

a) Jestliže číslo d dělí obě čísla a, b, pak d dělí také součet $a + b$ a rozdíl $a - b$.

b) Jestliže číslo d dělí obě čísla a, b, pak d dělí také číslo $11a + 13b$.

[Ve všech případech lze dělitele d z uvedených vyjádření vytknout, tedy d tato čísla dělí: Podle předpokladu platí $a = k \cdot d$ a $b = l \cdot d$ pro nějaká čísla k a l, tedy $a + b = (k + l) \cdot d$, $a - b = (k - l) \cdot d$ a $11a + 13b = (11k + 13l) \cdot d$.]

N2. Rozhodněte, zda platí toto tvrzení:
Pokud a a $2a + 3b$ jsou čísla dělitelná pěti, pak také číslo b je dělitelné pěti.

[Pokud 5 dělí čísla a a $2a + 3b$, pak 5 dělí také číslo $3b$: Podle předpokladu platí $a = 5k$ a $2a + 3b = 5l$ pro nějaká čísla k a l, tedy $3b = 5l - 2a = 5(l - 2k)$. Protože 3 a 5 jsou nesoudělná čísla, musí být b dělitelné pěti. Uvedené tvrzení platí.]

N3. Najděte všechna prvočísla p, pro která platí, že $\frac{p}{2} + 2p$ je prvočíslo.

[Jak p, tak $\frac{p}{2} + 2p$ musí být především celá čísla, tedy i $\frac{p}{2}$ musí být celé. Jediné sudé prvočíslo je 2, tedy $p = 2$ a $\frac{p}{2} + 2p = 5$, což je také prvočíslo. Úloha má jediné řešení $p = 2$.]

D1. Při dělení čísla a číslem 53 dostaneme zbytek 3 a při dělení čísla b číslem 53 dostaneme zbytek 2. Jaký zbytek dostaneme po dělení čísla $4a + 5b$ číslem 53?

[Podle předpokladu platí $a = 53k + 3$ a $b = 53l + 2$ pro nějaká čísla k a l. Odtud dostáváme $4a + 5b = 4(53k + 3) + 5(53l + 2) = 53(4k + 5l) + 22$. Hledaný zbytek je 22.]

D2. Pro obecné přirozené číslo k uvažte součet po sobě jdoucích čísel

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (6k + 3) + (6k + 4) + (6k + 5).$$

Rozhodněte, pro která k je tento součet dělitelný dvěma, třemi, čtyřmi, pěti, resp. šesti.

[Zápis S navádí k rozdělení do skupin po šesti sčítancích, každou skupinu sečteme a dále upravíme:

$$\begin{aligned} S &= (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5) + (6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11) + \cdots \\ &\qquad \cdots + (6k + (6k + 1) + (6k + 2) + (6k + 3) + (6k + 4) + (6k + 5)) = \\ &= 15 + (36 + 15) + \cdots + (36k + 15) = 15(k + 1) + 36(1 + \cdots + k). \end{aligned}$$

Z posledního vyjádření vyvozujeme, že S je dělitelné 3 pro libovolné k; S je dělitelné 2, právě když $k+1$ je dělitelné 2, tzn. k je liché; S je dělitelné 6, právě když k je liché; S je dělitelné 4, právě když $k+1$ je dělitelné 4, tzn. k dává po dělení 4 zbytek 3 ($k = 3, 7, 11, \ldots$). Dále S je dělitelné 5, právě když $1 + \cdots + k$ je dělitelné 5, což nastává pro k dělitelné 5 nebo pro k, která po dělení 5 dávají zbytek 4 ($k = 4, 5, 9, 10, \ldots$).

Součet prvních k přirozených čísel lze vyjádřit jako $1 + \cdots + k = \frac{1}{2}k(k+1)$, což může pomoct při kontrole dělitelnosti 5. Stejné pravidlo použité na součet ze zadání dává $S = \frac{1}{2}(6k+5)(6k+5+1) = 3(6k+5)(k+1)$, což může zkrátit mnohé z předchozích úvah.]

Z9–I–2

Pravidelný čtyřboký hranol má objem 864 cm^3 a obsah jeho pláště je dvojnásobkem obsahu podstavy.

Určete velikost tělesové úhlopříčky hranolu. *(V. Dedek)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Pravidelný čtyřboký hranol má podstavnou hranu dlouhou $a = 3$ cm a výšku $v = 5$ cm. Vypočítejte objem hranolu a obsah jeho pláště.

[Objem hranolu je $a^2 v = 45\,\mathrm{cm}^3$, obsah pláště je $4av = 60\,\mathrm{cm}^2$.]

N2. Určete velikost úhlopříčky obdélníku se stranami délek 4 cm a 9 cm.

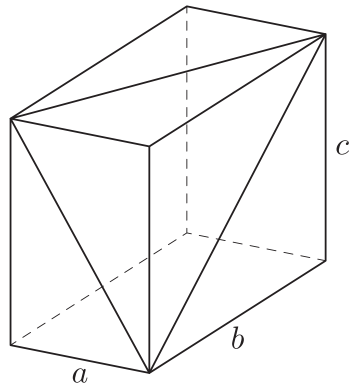
[Podle Pythagorovy věty je délka úhlopříčky $\sqrt{4^2 + 9^2} = \sqrt{97} \doteq 9{,}85$ cm.]

N3. Pravidelný čtyřboký hranol má tělesovou úhlopříčku délky $\sqrt{86}$ cm a výšku 6 cm. Určete objem hranolu.

[Tělesová úhlopříčka, výška a podstavná úhlopříčka tvoří pravoúhlý trojúhelník a stejně tak podstavná úhlopříčka s podstavnými hranami. Dvojím užitím Pythagorovy věty dostáváme $2a^2 = 86 - 6^2$, kde a značí velikost podstavné hrany. Odtud $a = \sqrt{25} = 5$ cm a objem hranolu je $5^2 \cdot 6 = 150\,\mathrm{cm}^3$.]

D1. Je dán kvádr s hranami délek a, b, c a trojúhelník určený jeho stěnovými úhlopříčkami. Pomocí a, b, c vyjádřete velikosti stran trojúhelníku a výpočtem ukažte, že trojúhelník není pravoúhlý.

[Všechny takové trojúhelníky jsou navzájem shodné, každý má strany délek $\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sqrt{a^2 + c^2}$, $\sqrt{b^2 + c^2}$. Pokud by trojúhelník byl pravoúhlý a např. poslední strana byla přeponou, pak by mělo platit $(a^2 + b^2) + (a^2 + c^2) = (b^2 + c^2)$ neboli $2a^2 = 0$. To však není možné, protože $a > 0$. Obdobně vyloučíme ostatní dva případy.]



D2. Kolik stěnových a kolik tělesových úhlopříček má pravidelný n-boký hranol?

[Z každého z n vrcholů jedné podstavy vede tělesová úhlopříčka do každého z $n-3$ vrcholů druhé podstavy, se kterými neleží ve stejné stěně. Tedy tělesových úhlopříček je $n(n-3) = n^2 - 3n$. Při pohledu shora tělesové úhlopříčky splývají s úhlopříčkami podstav, přičemž za každým průmětem jsou dvě tělesové a dvě podstavné úhlopříčky. Podstavných úhlopříček je proto stejně jako tělesových. V každé z n bočních stěn jsou dvě úhlopříčky, tedy stěnových úhlopříček je celkem $n^2 - 3n + 2n = n^2 - n$.]

Z9–I–3

Množinu $\{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$ *sestávající z prvních* n *přirozených čísel máme za úkol rozdělit do pěti neprázdných podmnožin tak, aby čísla v každé podmnožině byla po dvou nesoudělná.*

Najděte největší možné n, *pro které to je možné.* *(T. Bárta)*

Návodné a doplňující úlohy

Množinou se myslí skupina neopakujících se objektů (čísel, lidí, věcí atd.), kterým se říká *prvky*. Množina je charakterizována právě svými prvky, není podstatné jejich uspořádání či jiná struktura. *Podmnožinou* množiny je libovolná množina obsahující některé (nebo i všechny) prvky dané množiny, ale žádné jiné. *Neprázdná* množina obsahuje alespoň jeden prvek, množina neobsahující žádný prvek se nazývá *prázdná*.

N1. Devítiprvková množina byla rozdělena do šesti neprázdných podmnožin. Kolik nejvíce prvků může mít největší z těchto podmnožin?

[Pět neprázdných podmnožin obsahuje nejméně pět prvků, na šestou množinu zbývají nejvýše čtyři prvky.]

N2. Vypište všechny dvouprvkové množiny tvořené nesoudělnými děliteli čísla 24.

[Dělitelé čísla 24 jsou 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 a 24. Nesoudělné dvojice jsou $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{1,6\}$, $\{1,8\}$, $\{1,12\}$, $\{1,24\}$, $\{2,3\}$, $\{3,4\}$, $\{3,8\}$.]

N3. Kolik nejméně množin je potřeba k rozdělení všech dělitelů čísla 100 tak, aby čísla v každé množině byla po dvou nesoudělná?

[Číslo 100 má šest sudých dělitelů a tři liché. Méně než šest množin nestačí, avšak šest stačí: $\{1,2,5\}$, $\{4,25\}$, $\{10\}$, $\{20\}$, $\{50\}$, $\{100\}$.]

N4. Která přirozená čísla mají pouze nesoudělné dvojice dělitelů?

[Pokud má číslo vlastního dělitele různého od 1, pak tento dělitel spolu s daným číslem tvoří dvojici soudělných dělitelů. Čísla s uvedenou vlastností jsou pouze prvočísla.]

D1. Zdůvodněte: Jestliže dané číslo má nějakého sudého dělitele, pak alespoň polovina všech jeho dělitelů je sudých.

[Čísla se sudým dělitelem jsou nutně sudá (neboli lichá čísla mají pouze liché dělitele). Jestliže sudé číslo má lichého dělitele d, pak také číslo $2d$ je jeho dělitelem. Tedy sudých dělitelů je alespoň tolik, co lichých.]

Z9–I–4

Rozhodněte, zda je možné k číslu s ciferným součtem 2024 přičíst jednomístné číslo tak, aby výsledné číslo mělo ciferný součet 74. *(T. Bárta)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Jaký může být nejmenší a jaký největší ciferný součet přirozeného čísla, které má a) 2 číslice; b) 3 číslice; c) n číslic?

[Nejmenší ciferný součet je ve všech případech 1 (pro čísla s první číslicí 1 a ostatními 0). Největší ciferný součet je a) 18; b) 27; c) $9n$ (pro čísla tvořená samými 9).]

N2. Přičtěte k číslu 74 jednomístné číslo tak, aby ciferný součet výsledného čísla byl:

a) menší než ciferný součet čísla 74,
b) stejný jako ciferný součet čísla 74?

Najděte všechny možnosti.

[Pokud přičtením nedojde k přechodu přes desítku, ciferný součet se zvětší. Vyhovující možnosti jsou a) 6, 7 nebo 8; b) 9.]

N3. Popište všechna trojmístná čísla, jejichž ciferný součet se po přičtení 1 zmenší. Určete možné rozdíly ciferných součtů.

[Ciferný součet se zmenší pro čísla končící devítkou. Pro čísla tvaru $**9$ (kde $*$ značí číslice různé od 9) se ciferný součet zmenší o 8, pro čísla tvaru $*99$ se ciferný součet zmenší o 17, pro číslo 999 se ciferný součet zmenší o 26.]

D1. Odhalte pravidlo v zápise následujícího příkladu a určete ciferný součet výsledného čísla:

$$(989 + 111) + (98789 + 11211) + (9876789 + 1123211) + \cdots$$
$$\cdots + (98765432101234567 89 + 11234567898765432 11).$$

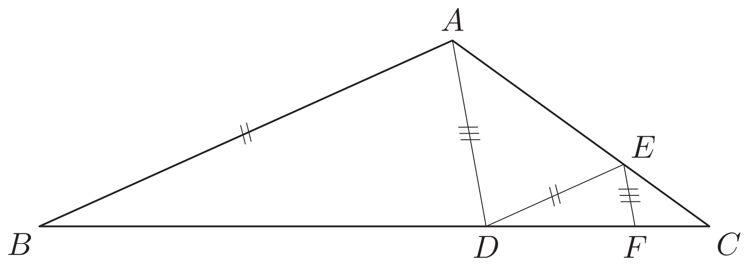
[Součty v závorkách jsou obecně tvaru 1100, 110000, 11000000 atd. (např. třetí závorku můžeme vyjádřit jako $9876789 + 1000000 + 123210 + 1 = 1000000 + 999999 + 1 = 11000000$). Součet prvních dvou závorek je 110000, prvních tří závorek 11111100 atd., tedy jedničky se kumulují a nové číslice se neobjevují. Ve vyjádření součtu prvních n závorek je $2n$ jedniček a dvě nuly. Závorek je celkem 9, tedy ciferný součet výsledného čísla je 18.]

D2. Jana si vymyslela 2022místné číslo a jeho ciferný součet pošeptala Petrovi. Petr vypočítal ciferný součet čísla, které mu sdělila Jana, a výsledek pošeptal Zuzce. Zuzka též vypočítala ciferný součet čísla, které dostala od Petra, a výsledek, jímž bylo dvojmístné číslo, pošeptala Adamovi. Adam provedl totéž s číslem od Zuzky a vyšel mu ciferný součet 1. Která čísla mohl šeptat Petr Zuzce? Určete všechny možnosti.

[Největší číslo, které mohla pošeptat Jana Petrovi, bylo $2022 \cdot 9 = 18198$ (pro 2022místné číslo tvořené samými 9). Největší číslo, které mohl pošeptat Petr Zuzce, bylo 36 (pro číslo 9999). Zuzka Adamovi pošeptala dvojmístné číslo s ciferným součtem 1, tj. jedině číslo 10. Petr Zuzce tedy pošeptal číslo menší nebo rovno 36 s ciferným součtem 10, tj. buď 19, nebo 28.[?]]

Z9–I–5

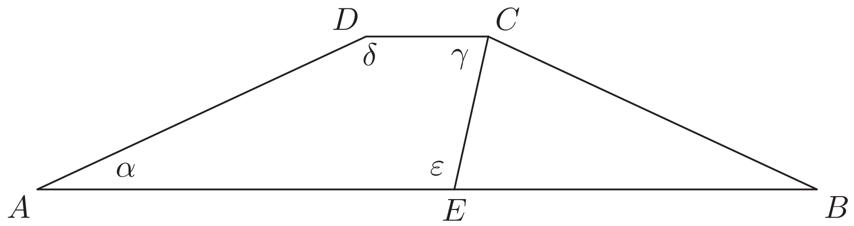
V trojúhelníku ABC je strana AB dvakrát delší než strana AC. Osa úhlu BAC protíná stranu BC v bodě D. Rovnoběžka se stranou AB procházející bodem D protíná stranu AC v bodě E. Rovnoběžka s úsečkou AD procházející bodem E protíná stranu BC v bodě F. Určete poměr úseček AD a EF. *(M. Dományová)*



Návodné a doplňující úlohy

N1. Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD. Bod E je průsečíkem strany AB s osou úhlu BCD. Velikost vnitřního úhlu při vrcholu A je 25°. Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů čtyřúhelníku $AECD$.

[Vnitřní úhly u vrcholů čtyřúhelníku $AECD$ označíme odpovídajícími písmeny řecké abecedy. Ze zadání známe $\alpha = 25°$. Z rovnoběžnosti $AB \| CD$ plyne $\delta = 180° - 25° = 155°$. To je také velikost úhlu BCD, tedy $\gamma = 155°/2 = 77{,}5°$. Ze součtu vnitřních úhlů čtyřúhelníku dostáváme $\varepsilon = 360° - \alpha - \delta - \gamma = 102{,}5°$.]

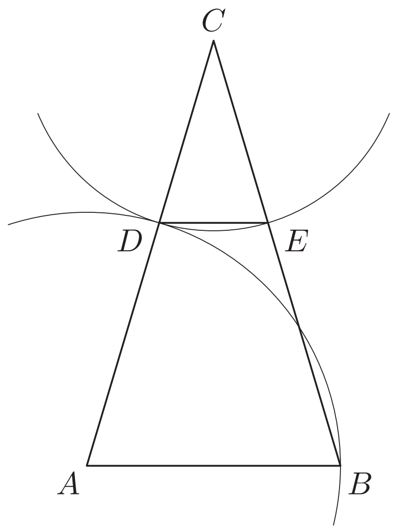


N2. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB, kde $|AB| = 4\,\text{cm}$ a $|AC| = 7\,\text{cm}$. Kružnice se středem A procházející bodem B protíná stranu AC v bodě D.

[?] Převzato ze 71. ročníku MO, úloha **Z9–I–2**.

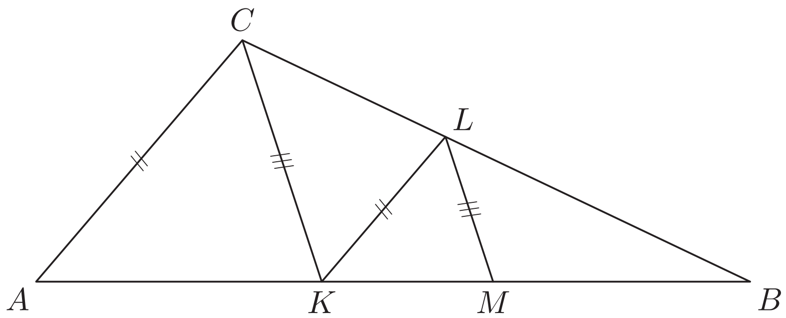
Kružnice se středem C procházející bodem D protíná stranu BC v bodě E. Určete obvod trojúhelníku DEC.

[Body D a E leží na kružnici se středem C, tedy trojúhelník DEC je rovnoramenný se základnou DE. Trojúhelníky DEC a ABC jsou podobné (přesněji stejnolehlé se středem C) a koeficient této podobnosti je $|DC| : |AC| = 3 : 7$ (zde využíváme $|DC| = |AC| - |AD| = |AC| - |AB| = 7 - 4$). Ve stejném poměru jsou také obvody trojúhelníků DEC a ABC. Obvod trojúhelníku ABC je $4 + 2 \cdot 7 = 18\,\mathrm{cm}$, obvod trojúhelníku DEC je $\frac{3}{7} \cdot 18 \doteq 7{,}71\,\mathrm{cm}$.]

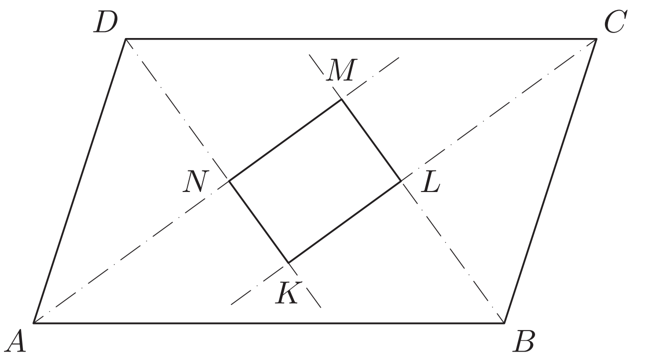


N3. V trojúhelníku ABC jsou na straně AB body K, M, na straně BC je bod L a platí: $AC \| KL$, $CK \| LM$, $|AC| = 5\,\mathrm{cm}$, $|CK| = 4\,\mathrm{cm}$, $|KL| = 3\,\mathrm{cm}$. Určete délku úsečky LM.

[Díky rovnoběžnostem $AC \| KL$ a $CK \| LM$ mají trojúhelníky AKC a KML shodné vnitřní úhly, tedy jsou podobné. Odpovídající si poměry stran jsou stejné, tedy např. platí $|AC| : |CK| = |KL| : |LM|$. Po dosazení a úpravě dostáváme $|LM| = \frac{12}{5} = 2{,}4\,\mathrm{cm}$.]



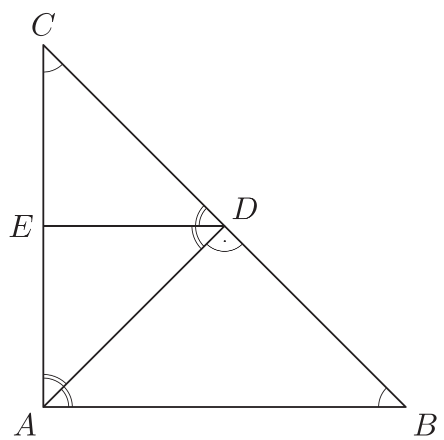
D1. Osy vnitřních úhlů kosodélníku $ABCD$ omezují čtyřúhelník $KLMN$. Pomocí vnitřních úhlů kosodélníku $ABCD$ vyjádřete velikosti vnitřních úhlů čtyřúhelníku $KLMN$.



[Vnitřní úhly u vrcholů čtyřúhelníku $ABCD$ označíme odpovídajícími písmeny řecké abecedy. Protože $ABCD$ je kosodélník, platí např. $\alpha + \beta = 180^\circ$. Protože osy úhlů tyto úhly půlí, platí např. $|\sphericalangle MAB| = \alpha/2$ a $|\sphericalangle MBA| = \beta/2$. Protože součet vnitřních úhlů trojúhelníku ABM je 180°, platí $|\sphericalangle AMB| = 180^\circ - \alpha/2 - \beta/2 = 180^\circ - (\alpha+\beta)/2 = 90^\circ$. Protože $KLMN$ je rovnoběžník a jeden jeho vnitřní úhel je pravý, jsou pravé všechny. Jedná se tedy o pravoúhelník, tj. obdélník či čtverec.]

D2. V trojúhelníku ABC protíná osa úhlu BAC stranu BC v bodě D a osa úhlu ADC protíná stranu AC v bodě E. Dále platí, že trojúhelníky ABD a DCE jsou podobné a strana AB měří 10 cm. Určete obvod trojúhelníku ABC.

[Z podobnosti trojúhelníků ABD a DCE plyne shodnost úhlů ABD a DCE, tedy trojúhelník ABC je rovnoramenný se základnou BC. Proto je osa AD kolmá k BC neboli úhel CDA je pravý. Z téže podobnosti dále plyne shodnost úhlů BAD a CDE, tedy i jejich dvojnásobků BAC a CDA. Proto je také úhel BAC pravý neboli trojúhelník ABC je pravoúhlý. Velikosti jeho stran jsou $|AC| = |AB| = 10\,\text{cm}$ a (podle Pythagorovy věty) $|BC| = 10\sqrt{2}\,\text{cm}$. Hledaný obvod je $10(2+\sqrt{2}) \doteq 34{,}14\,\text{cm}$.]



Z9–I–6

Plavci Pstruh a Pulec chtěli změřit své síly. Z protilehlých stran bazénu skočili současně do sousedních drah a plavali proti sobě, každý svojí konstantní rychlostí. Poprvé se plavci minuli ve vzdálenosti osm metrů od Pstruhovy startovní strany, na konci dráhy se hbitě otočili a plavali nazpět. Podruhé se plavci minuli ve vzdálenosti pět metrů od Pulcovy startovní strany, doplavali na konec dráhy, a tím závod skončil.

Určete, kdo vyhrál a jaká byla délka bazénu. *(L. Hozová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Králíci Pečínka, Fašírka, Řízek a Guláš soutěžili ve skoku do dálky. Pečínka skočila o 15 cm dál než Fašírka, která skočila o 2 dm méně než Guláš. Řízek skočil 2 730 mm, tedy o 1 m a 1 dm dál než Pečínka. Určete a znázorněte délky skoků všech králíků a jejich výsledné pořadí.

[Vzhledem ke skoku Řízka se snadno určí a na přímce znázorní délky skoků ostatních: Pečínka skočila $2730 - 1100 = 1630$ mm, Fašírka skočila $1630 - 150 = 1480$ mm, Guláš skočil $1480 + 200 = 1680$ mm. Výsledné pořadí bylo: 1. Řízek, 2. Guláš, 3. Pečínka, 4. Fašírka.[?]]

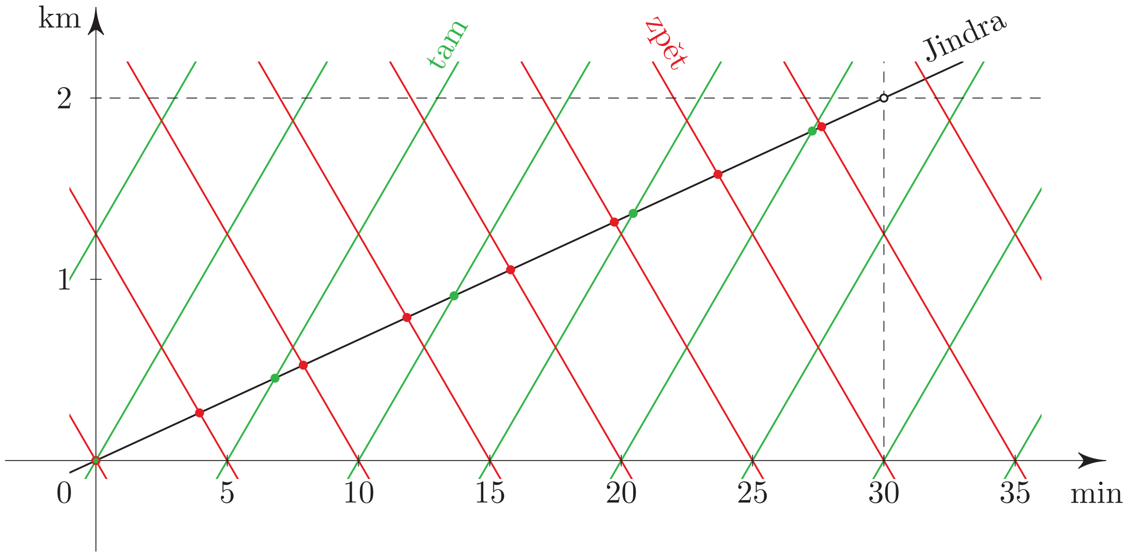
N2. Mohl být bazén ze soutěžní úlohy dlouhý 13 metrů?

[Předpokládejme, že bazén má 13 m a označme t čas prvního míjení plavců. V čase t byli 5 m od Pulcovy startovní strany, přičemž Pulec uplaval 5 m a Pstruh 8 m. V čase $2t$ uplaval Pulec dalších 5 m a Pstruh dalších 8 m, tedy od Pulcovy strany byl Pulec 10 m a Pstruh po obrátce 3 m. V čase $3t$ přidal každý zase svoji vzdálenost a míjeli se 11 m od Pulcovy strany. Podruhé se však měli míjet 5 m od Pulcovy strany, tedy bazén nemohl měřit 13 m.]

N3. Mezi dvěma zastávkami vzdálenými 2 km jezdí trolejbusy každých 5 minut, a to v obou směrech rychlostí 15 km za hodinu. Jindra šel podél trasy trolejbusu rychlostí 4 km za hodinu. Když vycházel od první zastávky, zrovna se zde míjely dva protijedoucí trolejbusy. Kolik trolejbusů Jindra cestou k druhé zastávce potkal?

[Trolejbusy ujedou trasu mezi zastávkami za $\frac{2}{15}$ h $=$ 8 min, Jindra ji ujde za $\frac{2}{4}$ h $=$ $=$ 30 min. Ve směru svého pohybu Jindra potkal všechny trolejbusy, které z první zastávky vyjely nejpozději 22. minutu jeho pohybu na trase, a těch bylo 5 (vyjely v minutách 0, 5, 10, 15, 20). Proti směru svého pohybu potkal všechny trolejbusy, které do první zastávky dojely nejpozději 38. minutu jeho pohybu na trase, a těch bylo 8 (dojely v minutách 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35). Jindra potkal celkem 13 trolejbusů. Názorně je vše zachyceno v následujícím grafu.]

[?] Převzato ze 70. ročníku MO, úloha **Z6–I–1**.



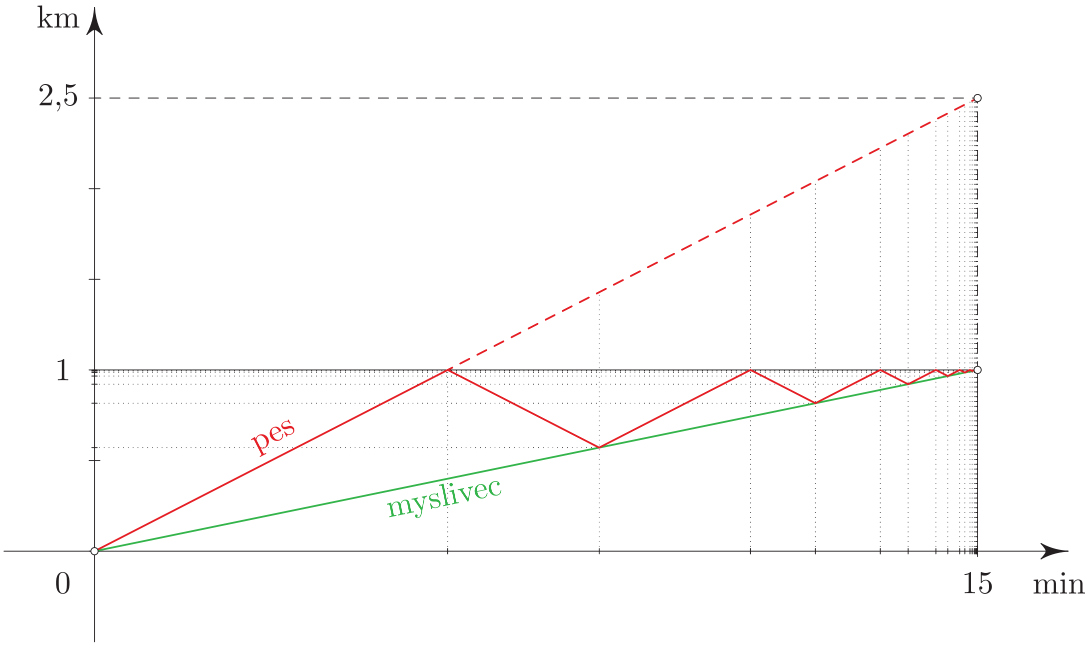
D1. Z města A do města B vyráží současně dodávka a kamion, ve stejnou chvíli proti nim z B do A vyjíždí motorka. Rychlosti dodávky, kamionu a motorky jsou po řadě 90 km/h, 40 km/h a 100 km/h. Vzdálenost měst A a B je 300 km. Za jak dlouho bude dodávka stejně vzdálena od kamionu i motorky?

[Za čas t měřený v hodinách se vozidla nachází ve vzdálenostech $90t$, $40t$, resp. $300 - 100t$ km od města A. Situace ze zadání nastane dvakrát. Poprvé než se potká motorka s dodávkou: rovnost vzdáleností dodávky od kamionu a dodávky od motorky je $90t - 40t = (300 - 100t) - 90t$, odkud vypočteme $t = \frac{5}{4}$ h $=$ 1 h 15 min. Podruhé nastane, když se motorka míjí s kamionem: rovnost vzdáleností kamionu a motorky od města A je $40t = 300 - 100t$, odkud vypočteme $t = \frac{15}{7}$ h $\doteq$ 2 h 9 min.]

D2. Myslivec jde rychlostí 4 km/h. Když je vzdálený 1 km od myslivny, pustí psa, který běhá rychlostí 10 km/h. Pes plný radosti běží k myslivně, u myslivny se hbitě otočí a běží zpět k myslivci. U něj se opět otočí a běží k myslivně, od ní zase k myslivci a tak pořád dokola. Kolik kilometrů pes naběhá, než oba dorazí do myslivny?

[Stačí se zaměřit na čas: Myslivec ujde 1 km k myslivně za $\frac{1}{4}$ h. Stejnou dobu běhal i pes, který tak uběhl $10 \cdot \frac{1}{4} = 2{,}5$ km. Postupné sčítání vzdáleností uběhnutých psem mezi jednotlivými otočkami by vedlo ke geometrické řadě, viz následující schéma.[?]]

[?] Klasická úloha upravená podle publikace M. Volfová, *Metody řešení matematických úloh*, Gaudeamus, Hradec Králové, 2000.


km
2,5
1
0
15
min
pes
myslivec