Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z9

Z9–I–1

Najděte všechny dvojice celých čísel x a y takových, že $x + y$ je prvočíslo a $3x + 5y$ je 16. *(P. Bak)*

Návodné a doplňující úlohy

V řešeních lze s výhodou použít následující charakterizaci dělitelnosti přirozených čísel: Číslo d dělí číslo a, právě když pro nějaké přirozené číslo k platí $a = k \cdot d$.

N1. Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla a, b, d platí:

a) Jestliže číslo d dělí obě čísla a, b, pak d dělí také součet $a + b$ a rozdíl $a - b$.
b) Jestliže číslo d dělí obě čísla a, b, pak d dělí také číslo $11a + 13b$.

N2. Rozhodněte, zda platí toto tvrzení:
Pokud a a $2a + 3b$ jsou čísla dělitelná pěti, pak také číslo b je dělitelné pěti.

N3. Najděte všechna prvočísla p, pro která platí, že $\frac{p}{2} + 2p$ je prvočíslo.

D1. Při dělení čísla a číslem 53 dostaneme zbytek 3 a při dělení čísla b číslem 53 dostaneme zbytek 2. Jaký zbytek dostaneme po dělení čísla $4a + 5b$ číslem 53?

D2. Pro obecné přirozené číslo k uvažte součet po sobě jdoucích čísel

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (6k + 3) + (6k + 4) + (6k + 5).$$

Rozhodněte, pro která k je tento součet dělitelný dvěma, třemi, čtyřmi, pěti, resp. šesti.

Z9–I–2

Pravidelný čtyřboký hranol má objem $864\,cm^3$ a obsah jeho pláště je dvojnásobkem obsahu podstavy.

Určete velikost tělesové úhlopříčky hranolu. *(V. Dedek)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Pravidelný čtyřboký hranol má podstavnou hranu dlouhou $a = 3\,\text{cm}$ a výšku $v = 5\,\text{cm}$. Vypočítejte objem hranolu a obsah jeho pláště.

N2. Určete velikost úhlopříčky obdélníku se stranami délek 4 cm a 9 cm.

N3. Pravidelný čtyřboký hranol má tělesovou úhlopříčku délky $\sqrt{86}\,\text{cm}$ a výšku 6 cm. Určete objem hranolu.

D1. Je dán kvádr s hranami délek a, b, c a trojúhelník určený jeho stěnovými úhlopříčkami. Pomocí a, b, c vyjádřete velikosti stran trojúhelníku a výpočtem ukažte, že trojúhelník není pravoúhlý.

D2. Kolik stěnových a kolik tělesových úhlopříček má pravidelný n-boký hranol?

Z9–I–3

Množinu $\{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$ sestávající z prvních n přirozených čísel máme za úkol rozdělit do pěti neprázdných podmnožin tak, aby čísla v každé podmnožině byla po dvou nesoudělná.

Najděte největší možné n, pro které to je možné. *(T. Bárta)*

Návodné a doplňující úlohy

Množinou se myslí skupina neopakujících se objektů (čísel, lidí, věcí atd.), kterým se říká *prvky*. Množina je charakterizována právě svými prvky, není podstatné jejich uspořádání či jiná struktura. *Podmnožinou* množiny je libovolná množina obsahující některé (nebo i všechny) prvky dané množiny, ale žádné jiné. *Neprázdná* množina obsahuje alespoň jeden prvek, množina neobsahující žádný prvek se nazývá *prázdná*.

N1. Devítiprvková množina byla rozdělena do šesti neprázdných podmnožin. Kolik nejvíce prvků může mít největší z těchto podmnožin?

N2. Vypište všechny dvouprvkové množiny tvořené nesoudělnými děliteli čísla 24.

N3. Kolik nejméně množin je potřeba k rozdělení všech dělitelů čísla 100 tak, aby čísla v každé množině byla po dvou nesoudělná?

N4. Která přirozená čísla mají pouze nesoudělné dvojice dělitelů?

D1. Zdůvodněte: Jestliže dané číslo má nějakého sudého dělitele, pak alespoň polovina všech jeho dělitelů je sudých.

Z9–I–4

Rozhodněte, zda je možné k číslu s ciferným součtem 2024 přičíst jednomístné číslo tak, aby výsledné číslo mělo ciferný součet 74. *(T. Bárta)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Jaký může být nejmenší a jaký největší ciferný součet přirozeného čísla, které má a) 2 číslice; b) 3 číslice; c) n číslic?

N2. Přičtěte k číslu 74 jednomístné číslo tak, aby ciferný součet výsledného čísla byl:

a) menší než ciferný součet čísla 74,
b) stejný jako ciferný součet čísla 74?

Najděte všechny možnosti.

N3. Popište všechna trojmístná čísla, jejichž ciferný součet se po přičtení 1 zmenší. Určete možné rozdíly ciferných součtů.

D1. Odhalte pravidlo v zápise následujícího příkladu a určete ciferný součet výsledného čísla:

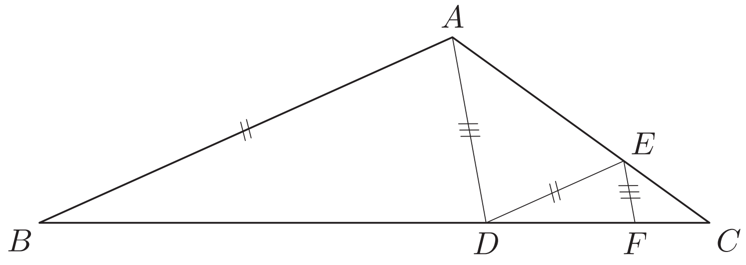
$$(989 + 111) + (98789 + 11211) + (9876789 + 1123211) + \cdots$$
$$\cdots + (98765432101234567889 + 11234567898765432111).$$

D2. Jana si vymyslela 2022místné číslo a jeho ciferný součet pošeptala Petrovi. Petr vypočítal ciferný součet čísla, které mu sdělila Jana, a výsledek pošeptal Zuzce. Zuzka též vypočítala ciferný součet čísla, které dostala od Petra, a výsledek, jímž bylo dvojmístné číslo, pošeptala Adamovi. Adam provedl totéž s číslem od Zuzky a vyšel mu ciferný součet 1. Která čísla mohl šeptat Petr Zuzce? Určete všechny možnosti.

Z9–I–5

V trojúhelníku ABC je strana AB dvakrát delší než strana AC. Osa úhlu BAC protíná stranu BC v bodě D. Rovnoběžka se stranou AB procházející bodem D protíná stranu AC v bodě E. Rovnoběžka s úsečkou AD procházející bodem E protíná stranu BC v bodě F.

Určete poměr úseček AD a EF. *(M. Dományová)*



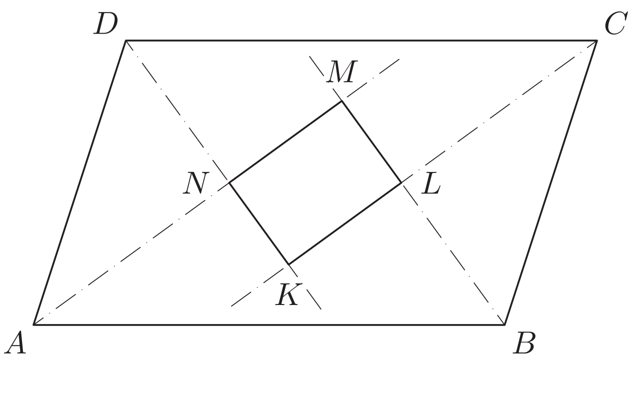
Návodné a doplňující úlohy

N1. Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD. Bod E je průsečíkem strany AB s osou úhlu BCD. Velikost vnitřního úhlu při vrcholu A je $25°$. Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů čtyřúhelníku $AECD$.

N2. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB, kde $|AB| = 4\,\mathrm{cm}$ a $|AC| = 7\,\mathrm{cm}$. Kružnice se středem A procházející bodem B protíná stranu AC v bodě D. Kružnice se středem C procházející bodem D protíná stranu BC v bodě E. Určete obvod trojúhelníku DEC.

N3. V trojúhelníku ABC jsou na straně AB body K, M, na straně BC je bod L a platí: $AC \| KL$, $CK \| LM$, $|AC| = 5\,\mathrm{cm}$, $|CK| = 4\,\mathrm{cm}$, $|KL| = 3\,\mathrm{cm}$. Určete délku úsečky LM.

D1. Osy vnitřních úhlů kosodélníku $ABCD$ omezují čtyřúhelník $KLMN$. Pomocí vnitřních úhlů kosodélníku $ABCD$ vyjádřete velikosti vnitřních úhlů čtyřúhelníku $KLMN$.



D2. V trojúhelníku ABC protíná osa úhlu BAC stranu BC v bodě D a osa úhlu ADC protíná stranu AC v bodě E. Dále platí, že trojúhelníky ABD a DCE jsou podobné a strana AB měří $10\,\mathrm{cm}$. Určete obvod trojúhelníku ABC.

Z9–I–6

Plavci Pstruh a Pulec chtěli změřit své síly. Z protilehlých stran bazénu skočili současně do sousedních drah a plavali proti sobě, každý svojí konstantní rychlostí. Poprvé se plavci minuli ve vzdálenosti osm metrů od Pstruhovy startovní strany, na konci dráhy se hbitě otočili a plavali nazpět. Podruhé se plavci minuli ve vzdálenosti pět metrů od Pulcovy startovní strany, doplavali na konec dráhy, a tím závod skončil.

Určete, kdo vyhrál a jaká byla délka bazénu. *(L. Hozová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Králíci Pečínka, Fašírka, Řízek a Guláš soutěžili ve skoku do dálky. Pečínka skočila o 15 cm dál než Fašírka, která skočila o 2 dm méně než Guláš. Řízek skočil 2 730 mm, tedy o 1 m a 1 dm dál než Pečínka. Určete a znázorněte délky skoků všech králíků a jejich výsledné pořadí.

N2. Mohl být bazén ze soutěžní úlohy dlouhý 13 metrů?

N3. Mezi dvěma zastávkami vzdálenými 2 km jezdí trolejbusy každých 5 minut, a to v obou směrech rychlostí 15 km za hodinu. Jindra šel podél trasy trolejbusu rychlostí 4 km za hodinu. Když vycházel od první zastávky, zrovna se zde míjely dva protijedoucí trolejbusy. Kolik trolejbusů Jindra cestou k druhé zastávce potkal?

D1. Z města A do města B vyráží současně dodávka a kamion, ve stejnou chvíli proti nim z B do A vyjíždí motorka. Rychlosti dodávky, kamionu a motorky jsou po řadě 90 km/h, 40 km/h a 100 km/h. Vzdálenost měst A a B je 300 km. Za jak dlouho bude dodávka stejně vzdálena od kamionu i motorky?

D2. Myslivec jde rychlostí 4 km/h. Když je vzdálený 1 km od myslivny, pustí psa, který běhá rychlostí 10 km/h. Pes plný radosti běží k myslivně, u myslivny se hbitě otočí a běží zpět k myslivci. U něj se opět otočí a běží k myslivně, od ní zase k myslivci a tak pořád dokola. Kolik kilometrů pes naběhá, než oba dorazí do myslivny?