Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z5

Z5–I–1

V naší ulici bydlí Čapkovi a Němcovi. Čapkovi mají dva syny, Karlíka a o dva roky staršího Pepíka. Němcovi mají dceru Bóžu. Narozeniny všech tří dětí slavívají obě rodiny společně, a to v den Karlíkových narozenin. Při letošní oslavě byla Bóža třikrát starší než Karlík. Za tři roky bude Karlíkovi a Pepíkovi dohromady stejně jako bude Bóže.

Kolik let bylo dětem při letošní oslavě? *(M. Petrová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Pankrác je o 3 roky mladší než Servác. Bonifác je čtyřikrát starší než Pankrác. Kolik let je všem třem klukům dohromady, když Pankrácovi je 1 rok? Kolik let jim bude dohromady za rok?

[Jak Servác, tak Bonifác mají 4 roky. Všem třem dohromady je 9 let. Příští rok jim dohromady bude 12 let.]

N2. Linda je o 8 let mladší než Hanka. Hanka je pětkrát starší než Linda. Kolik je každé z dívek let?

[Kdyby Linda měla 1 rok, Hanka by měla 9 let, což není pětkrát víc. Kdyby Linda měla 2 roky, Hanka by měla 10 let, a to je správné řešení.]

N3. Tři sourozenci Jarek, Ládík a Patrik se narodili na Hromnice v třech po sobě jdoucích letech. Za dva roky jim dohromady bude 30 let. Kolik bude nejstaršímu z nich příští rok?

[Letos je sourozencům dohromady $30 - 2 \cdot 3 = 24$ let. Jejich věky tedy jsou 7, 8 a 9 let. Nejstaršímu příští rok bude 10 let.]

N4. Letos na Vánoce je Silvě a Terce dohromady o devět let méně než Uršule. Za kolik let na Vánoce bude Silvě a Terce dohromady víc než Uršule?

[Každý rok přidá do součtu věků Silvy a Terky 2 roky, tedy 1 rok navíc oproti přibývajícím létům Uršuly. Musíme tedy počkat $9 + 1 = 10$ let.]

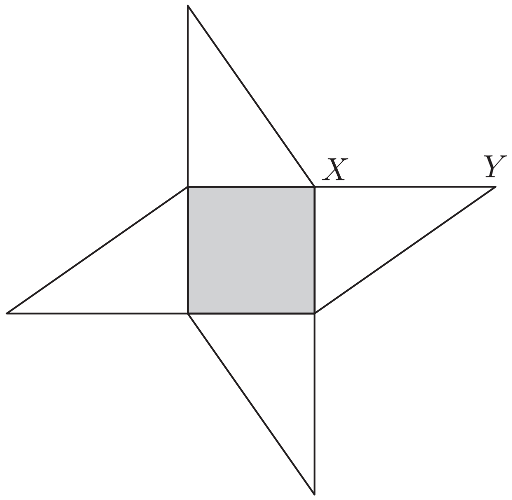
D1. Martin a Nina v pondělí ráno dostali každý svůj pytlík se stejným počtem bonbónů. Martin každý všední den snědl stejný počet bonbónů, až mu na víkend žádný nezbyl. Nina ujídala bonbóny celý týden, také každý den stejný počet, a v neděli byl i její pytlík prázdný. Kolik nejméně bonbónů mohlo být v každém pytlíku?

[Protože Martin jedl 5 dnů a Nina 7 dnů, musí být hledané číslo násobkem pěti i sedmi. V pytlíku bylo nejméně 35 bonbónů.]

Z5–I–2

Na obrázku je šedý čtverec se stranou délky 10 cm. Čtverec doplňují čtyři stejné pravoúhlé trojúhelníky do tvaru hvězdy. Součet obsahů těchto čtyř trojúhelníků je čtyřnásobkem obsahu čtverce.

Určete délku strany XY. *(E. Semerádová)*



Návodné a doplňující úlohy

N1. Čtverec o straně 1 cm se nazývá *jednotkový*. Jednotkový čtverec má obsah 1 centimetr čtvereční, což se značí 1 cm^2. Kolik centimetrů čtverečních má čtverec, který má středy stran ve vrcholech jednotkového čtverce?

[Čtverec obsahuje jeden jednotkový čtverec a z přečnívajících cípů lze složit druhý jednotkový čtverec. Obsah čtverce je 2 cm^2.]

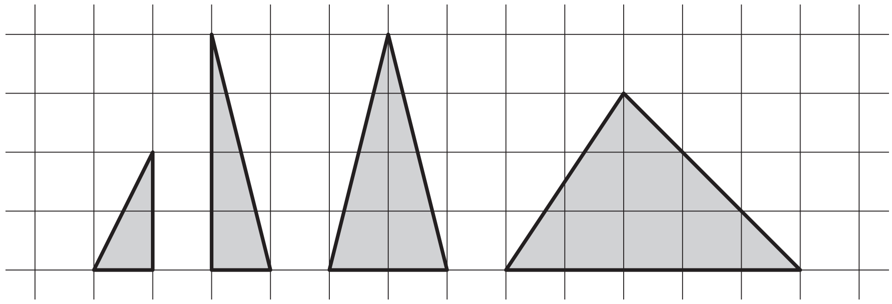
N2. Obdélník je třikrát delší než širší a jeho obsah je 75 cm^2. Kolik centimetrů měří jeho kratší strana?

[Obdélník je tvořen třemi čtverci, jejichž strany se shodují s kratšími stranami obdélníku. Obsah každého ze čtverců je 25 cm^2. Kratší strana obdélníku měří 5 cm.]

N3. Čtverec $ABCD$ má strany délky 6 cm. Střed strany AD označíme E a střed strany BC označíme F. Určete obsahy trojúhelníků ABE, BFE, EFD a FCD.

[Trojúhelníky jsou shodné a dohromady tvoří čtverec $ABCD$. Čtverec má obsah 36 cm^2, obsah každého z trojúhelníků je čtvrtinový, tj. 9 cm^2.]

N4. Trojúhelníky na obrázku mají vrcholy v uzlových bodech jednotkové čtvercové sítě. Určete jejich obsahy.



[Každý z trojúhelníků buď tvoří polovinu obdélníku, nebo jej lze na takové poloviny rozdělit. Poté je snadné spočítat obsažené čtverce sítě. Obsahy trojúhelníků jsou $1\,\mathrm{cm}^2$, $2\,\mathrm{cm}^2$, $4\,\mathrm{cm}^2$ a $7{,}5\,\mathrm{cm}^2$.]

D1. Pravoúhlý trojúhelník má odvěsny délek 1 cm a 2 cm. Jeho obsah je $1\,\mathrm{cm}^2$, tedy v centimetrech čtverečních je vyjádřen celým číslem. Vladan prodloužil obě odvěsny tohoto trojúhelníku o stejný celočíselný počet centimetrů. Je možné, aby obsah Vladanova trojúhelníku v cm^2 nebyl vyjádřen celým číslem?

[Délky odvěsen Vladanova trojúhelníku se liší o 1 cm, tedy jedna je vyjádřena sudým a druhá lichým číslem. Součin těchto čísel je sudý a po dělení dvěma dostaneme celé číslo. Obsah v cm^2 je vždy vyjádřen celým číslem.]

Z5–I–3

V následujícím příkladu je pětkrát použito znaménko + a výsledek je násobkem tří:

$$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 = 39.$$

Změňte dvě ze znamének + na znaménko − tak, aby výsledek nového příkladu byl opět násobkem tří. Najděte všechny možnosti. *(E. Semerádová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Která z následujících čísel lze beze zbytku dělit třemi?

30, 45, 777, 9999.

[Všechna uvedená čísla dávají po dělení třemi zbytek 0.]

N2. Místo hvězdičky doplňte do $30 + *$ a $30 - *$ jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 tak, aby výsledky obou výpočtů bylo možné beze zbytku dělit třemi. Najděte všechna řešení.

[Číslo 30 lze dělit třemi beze zbytku, tedy také doplněná čísla musí jít dělit třemi beze zbytku. Vyhovují čísla 3 a 6.]

N3. Místo hvězdičky doplňte do $30 + *$ a $30 - *$ jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 tak, aby výsledky obou výpočtů bylo možné beze zbytku dělit čtyřmi. Najděte všechna řešení.

[Číslo 30 dává po dělení čtyřmi zbytek 2, tedy doplněná čísla musí po dělení čtyřmi dávat zbytek 2. Vyhovují čísla 2 a 6.]

N4. Místo hvězdičky doplňte do $32 + *$ a $32 - *$ jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 tak, aby výsledky obou výpočtů bylo možné beze zbytku dělit pěti. Najděte všechna řešení.

[Číslo 32 dává po dělení pěti zbytek 2, tedy první číslo musí po dělení pěti dávat zbytek 3 a druhé 2. Pokud v obou výpočtech doplňujeme stejné číslo, pak úloha nemá řešení. Pokud připustíme různá čísla, pak v prvním výpočtu vyhovuje 3, ve druhém 2.]

D1. Kolik z následujících třiceti součtů lze beze zbytku dělit třemi?

$$1 + 2, \quad 2 + 3, \quad 3 + 4, \quad \ldots, \quad 29 + 30, \quad 30 + 31.$$

[Sousední součty se liší o 2. Zbytky po dělení třemi jsou tvořeny trojicí 0, 2, 1, která se opakuje desetkrát. Deset z uvedených součtů je dělitelných třemi.]

Z5–I–4

Pinocchio tvrdí, že číslo dne v datu jeho narození lze beze zbytku dělit třemi, čtyřmi, pěti a šesti. Tři z těchto čtyř informací jsou pravdivé, jedna je nepravdivá.

Kolikátý den v měsíci může mít Pinocchio narozeniny? Určete všechny možnosti.

(E. Novotná)

Návodné a doplňující úlohy

N1. Pro následující dvojice čísel uvažte jejich společné násobky a napište pět nejmenších:

a) dva a tři,
b) tři a čtyři,
c) tři a šest.

[Pro každou dvojici začínáme s nejmenším společným násobkem: a) 6, 12, 18, 24, 30; b) 12, 24, 36, 48, 60; c) 6, 12, 18, 24, 30.]

N2. Jak bez dělení poznáme, že tisícimístné přirozené číslo lze beze zbytku dělit dvěma?

[Jedná se o sudé číslo. Končí číslicí 0, 2, 4, 6, nebo 8.]

N3. Kterými jednomístnými přirozenými čísly nelze číslo 84 dělit beze zbytku?

[Beze zbytku nelze dělit čísly 5, 8, 9. Viz též rozklad $84 = 4 \cdot 21 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$.]

D1. Kolik čísel mezi 11 a 20 je násobkem právě čtyř přirozených čísel?

[Každé číslo je násobkem jedničky a sebe sama. Hledáme čísla, která jsou násobkem dvou dalších čísel. Mezi uvedenými čísly to jsou čísla 14 a 15.]

D2. Najděte tři nejmenší přirozená čísla, která lze beze zbytku dělit čtyřmi a šesti, ale nelze je beze zbytku dělit dvaceti čtyřmi.

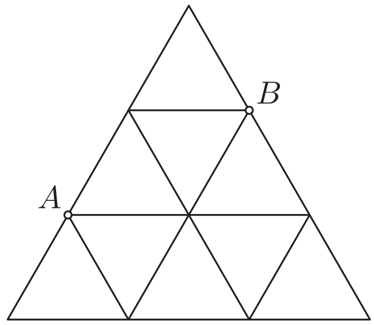
[Společné násobky čísel 4 a 6 řazené vzestupně jsou 12, 24, 36, 48, 60 atd. Tři nejmenší, které nejsou násobky 24, jsou 12, 36, 60.]

Z5–I–5

V síti stezek vyznačených na obrázku má každá stezka mezi sousedními křižovatkami délku 1 km.

Kolik cest dlouhých nanejvýš 3 km vede po stezkách z místa A do místa B?

(E. Semerádová)



Návodné a doplňující úlohy

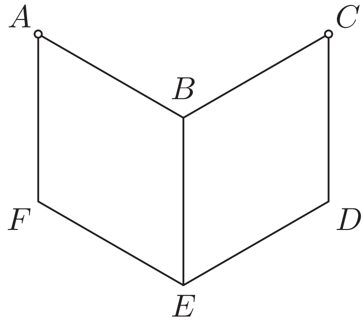
N1. Kolik cest v zadání soutěžní úlohy z bodu A do bodu B má délku a) 1 km; b) 2 km? Vymyslete zápis, který jednoznačně každou z možných cest popíše.

[a) Taková cesta neexistuje. b) Dvě cesty: V–SV a SV–V (směry popisujeme přibližně podle světových stran).]

N2. Bob se chystá na výlet. Z parkoviště k vodopádu vedou 3 cesty. Od vodopádu k rozhledně vedou 4 cesty. Kolika způsoby může Bob dojít po cestách z parkoviště kolem vodopádu k rozhledně? (Bob se nevrací ani na parkoviště, ani k vodopádu.)

[Libovolnou cestu od parkoviště k vodopádu lze kombinovat s libovolnou cestou od vodopádu k rozhledně. Z parkoviště k vodopádu může jít $3 \cdot 4 = 12$ způsoby.]

N3. Znázorněné úsečky mají ve skutečnosti délku 1 m. Z bodu A do bodu C máme po úsečkách ujít trasu dlouhou přesně 4 m. Kolika způsoby to lze provést, aniž by některá úsečka byla použita dvakrát?



[Možné trasy jsou tři: A–B–E–D–C, A–F–E–D–C a A–F–E–B–C.]

D1. Šnek Neposeda leze po obvodu rovnostranného trojúhelníku ABC. Začíná z vrcholu A, směr lezení mění pouze ve vrcholech trojúhelníku a končí opět ve vrcholu A. Kolika způsoby může v součtu ulézt délku a) čtyř; b) pěti stran trojúhelníku?

[a) Čtyřmi způsoby: A–B–A–B–A, A–B–C–B–A, A–C–A–C–A, A–C–B–C–A. b) Deseti způsoby: A–B–A–B–C–A, A–B–A–C–B–A, A–B–C–B–C–A, A–B–C–A–C–A, A–B–C–A–B–A a dalších pět cest s prohozenými vrcholy B a C.]

D2. Poník běhá po obvodu čtverce $ABCD$ se stranou délky 100 m. Vždy vyběhne z vrcholu A a tam se i vrátí. Jenom v tomto bodě může také měnit směr obíhání čtverce. Kolik metrů měří sedmý nejkratší poníkův běh podle těchto pravidel?

[Délka každého běhu je násobkem obvodu čtverce, nezávisle na tom, zda poník mění směr či nikoli. Sedmý nejkratší běh měří $7 \cdot 4 \cdot 100 = 2\,800$ metrů.]

Z5–I–6

Andělka navléká na nit bez mezer za sebe korálky tří různých tvarů A, B, C. Postupuje tak, že tvary střídá ve stále stejném pořadí a postupně zvyšuje počty tvarů ve skupinách:

$$ABCAABBCCAAABBBCCCAAAABBBBCCCC\ldots$$

Korálek tvaru A zabírá 5 mm nitě, korálek tvaru B zabírá 4 mm, korálek tvaru C zabírá 3 mm.

Kolik korálků potřebuje Andělka k výrobě náhrdelníku dlouhého alespoň 50 cm?

(L. Dedková)

Návodné a doplňující úlohy

N1. Maruška měla jednu korunu, dvě dvoukoruny, pět pětikorun, deset desetikorun a dvacet dvacetikorun. Jakou částku v mincích měla?

[Měla $1 + 4 + 25 + 100 + 400 = 530$ korun.]

N2. Toník měl koruny, dvoukoruny, pětikoruny a desetikoruny, od každého druhu alespoň jeden kus. V korunách měl stejnou částku jako v desetikorunách a ve dvoukorunách měl stejnou částku jako v pětikorunách. Kolik nejméně měl Toník mincí?

[Nejméně měl 10 korun, 1 desetikorunu, 5 dvoukorun a 2 pětikoruny, tj. 18 mincí.]

N3. Miloš měl několik korun, pět dvoukorun, několik pětikorun a sedm desetikorun v celkové hodnotě 93 Kč. Kolik nejméně měl Miloš mincí?

[Koruny a pětikoruny měly celkovou hodnotu $93 - 10 - 70 = 13$ Kč. Tedy měl nejméně 3 koruny a 2 pětikoruny, celkem nejméně $3 + 5 + 2 + 7 = 17$ mincí.]

D1. Dana měla 2 jablka, 3 hrušky a 4 nektarinky. Ema měla od každého z těchto druhů ovoce dvakrát tolik, co Dana. Fína měla hrušek o jednu víc než jablek a o jednu méně než nektarinek. Celkem děvčata měla 20 nektarinek. Kolik měla dohromady jablek?

[Ema měla 4 jablka, 6 hrušek a 8 nektarinek. Fína měla $20-4-8 = 8$ nektarinek, a tedy $8 - 1 - 1 = 6$ jablek. Dohromady měla děvčata $2 + 4 + 6 = 12$ jablek.]