73. ročník Matematické olympiády (2023/2024)

Ústřední kolo kategorie Z9

7. května 2024

1. Je pravda, že libovolné kladné celé číslo lze vynásobit některým z čísel 1, 2, 3, 4, 5 tak, aby výsledek začínal číslicí 1?

2. a) Najděte 4 navzájem různá kladná celá čísla taková, že když se podíváme na součty libovolných dvou z nich, tvoří těchto 6 součtů 6 po sobě jdoucích kladných celých čísel.

b) Existuje 5 navzájem různých kladných celých čísel takových, že když se podíváme na součty libovolných dvou z nich, tvoří těchto 10 součtů 10 po sobě jdoucích kladných celých čísel?

3. V ostroúhlém trojúhelníku ABC platí, že výška z vrcholu A má stejnou délku jako těžnice z vrcholu B. Označme jejich průsečík P. Určete možné velikosti úhlu APB.

4. Máme čelovku a krabici s 21 označenými tužkovými bateriemi. Deset z nich je vybitých, ale jedenáct jich ještě funguje. V každém kroku můžeme dát do čelovky dvě baterie a pokud obě fungují, čelovka se rozsvítí. Po kolika nejméně krocích umíme zajistit, aby se čelovka určitě rozsvítila? (Nezapomeňte zdůvodnit, že méně kroků stačit nemusí.)

Soutěžící má na vypracování úloh 3 hodiny čistého času; případné dotazy k textu zadání mohou být zodpovězeny v prvních 20 minutách. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby. Knihy, kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou.

73. ročník Matematické olympiády (2023/2024)

Ústřední kolo kategorie Z9

7. května 2024

1. Чи правда, що будь-яке додатне ціле число можна помножити на деяке з чисел 1, 2, 3, 4, 5 так, щоб результат починався з цифри 1?

2. (а) Знайдіть 4 попарно різних додатних цілих числа так, що 6 сум довільних двох з них утворюють 6 послідовних чисел.

   (б) Чи існує 5 попарно різних додатних цілих чисел так, що 10 сум довільних двох з них утворюють 10 послідовних чисел?

3. У гострокутному трикутнику ABC довжина висоти з вершини A дорівнює довжині медіани з вершини B. Позначимо точку їхнього перетину через P. Знайдіть можливі величини кута APB.

4. У нас є налобний ліхтарик і коробка з 21 підписаною батарейкою. Десять з них розрядилися, але одинадцять ще працюють. На кожному кроці ми можемо вставити в ліхтарик по дві батарейки, і якщо вони обидві працюють, то ліхтарик засвітиться. Скільки як мінімум кроків потрібно, щоб ми змогли гарантувати, що ліхтарик засвітиться? (Не забудьте обґрунтувати, що меншої кількості кроків може бути недостатньо.)

Soutěžící má na vypracování úloh 3 hodiny čistého času; případné dotazy k textu zadání mohou být zodpovězeny v prvních 20 minutách. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby. Knihy, kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou.

1. *Je pravda, že libovolné kladné celé číslo lze vynásobit některým z čísel 1, 2, 3, 4, 5 tak, aby výsledek začínal číslicí 1?*

Řešení. Odpověď: Ano, je to pravda.

Každé jednomístné číslo takto vynásobit lze, příklady jsou uvedené v následující tabulce.

původní číslo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
číslo, kterým násobíme	1	5	5	3	3	2	2	2	2
výsledek	1	10	15	12	15	12	14	16	18

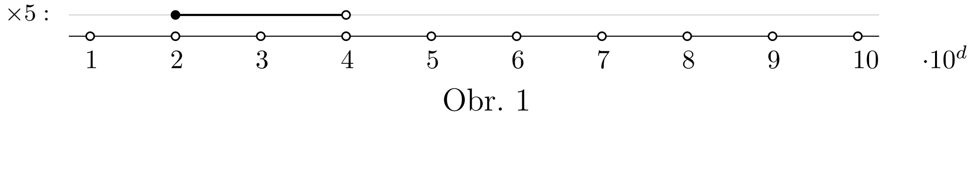
Podobně lze najít příklady i pro dvojmístná čísla.

původní číslo	10 ... 19	20 ... 39	40 ... 59	60 ... 99
číslo, kterým násobíme	1 ... 1	5 ... 5	3 ... 3	2 ... 2
výsledek	10 ... 19	100 ... 195	120 ... 197	120 ... 198

Ukážeme, že libovolné kladné celé číslo n lze takto vynásobit. Rozebereme několik případů podle toho, kterou číslicí číslo n začíná. Klíčové pozorování je, že d-místná čísla začínající číslicí c jsou právě ta čísla n, pro která platí $c\cdot 10^d \leqq n < (c+1)\cdot 10^d$. (Například trojmístná čísla začínající číslicí 1 jsou právě ta čísla n, pro která platí $1\cdot 10^3 \leqq n < 2\cdot 10^3$.)

1. Pokud první číslice n je $c = 1$, můžeme číslo n vynásobit jedničkou. Tím se n nezmění a bude stále začínat jedničkou.
2. Pokud první číslice n je $c = 2$ nebo $c = 3$, pak platí $2\cdot 10^d \leqq n < 4\cdot 10^d$. Po vynásobení pětkou dostaneme
$$10 \cdot 10^d \leqq 5n < 20 \cdot 10^d$$
neboli
$$1 \cdot 10^{d+1} \leqq 5n < 2 \cdot 10^{d+1},$$
takže číslo $5n$ je $(d+1)$-místné a začíná jedničkou, jak jsme chtěli.
3. Pokud první číslice n je $c = 4$ nebo $c = 5$, pak platí $4\cdot 10^d \leqq n < 6\cdot 10^d$. Po vynásobení trojkou podobně jako v předchozím případě dostaneme
$$1{,}2 \cdot 10^{d+1} \leqq 3n < 1{,}8 \cdot 10^{d+1},$$
takže číslo $3n$ je $(d+1)$-místné a začíná jedničkou.
4. Pokud první číslice n je $c \in \{6, 7, 8, 9\}$, pak platí $6 \cdot 10^d \leqq n < 10 \cdot 10^d$. Tentokrát po vynásobení dvojkou dostaneme
$$1{,}2 \cdot 10^{d+1} \leqq 2n < 2 \cdot 10^{d+1},$$
takže číslo $2n$ je opět $(d+1)$-místné a začíná jedničkou, jak jsme chtěli.

Poznámka. Ve výše uvedeném řešení jsme nevyužili možnost násobení čtyřkou. Z následujícího obrázku lze nahlédnout, že podobně jsme si místo toho mohli vystačit bez násobení trojkou.



Obr. 1

2. *a) Najděte* 4 *navzájem různá kladná celá čísla taková, že když se podíváme na součty libovolných dvou z nich, tvoří těchto* 6 *součtů* 6 *po sobě jdoucích kladných celých čísel.*

b) Existuje 5 *navzájem různých kladných celých čísel takových, že když se podíváme na součty libovolných dvou z nich, tvoří těchto* 10 *součtů* 10 *po sobě jdoucích kladných celých čísel?*

Řešení. a) Vyhovují například čísla $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 5$, pro která vyjdou součty

$$a + b = 3, \quad a + c = 4, \quad b + c = 5, \quad a + d = 6, \quad b + d = 7, \quad c + d = 8.$$

b) Odpověď: Ne, takových 5 čísel a, b, c, d, e neexistuje. Ukážeme dva různé způsoby.

První způsob (sečtením). Součet S všech deseti součtů dvojic je roven

$$S = (a + b) + (a + c) + \ldots + (d + e) = 4 \cdot (a + b + c + d + e),$$

protože každé z pěti čísel se vyskytuje ve čtyřech součtech (jednou s každým z ostatních čísel). Zejména tedy platí, že S je sudé číslo.

Současně ale platí, že součet libovolných deseti po sobě jdoucích kladných celých čísel je roven $n + (n + 1) + (n + 2) + \ldots + (n + 9) = 10n + 45$ pro nějaké kladné celé číslo n. Zejména tedy platí, že S je liché číslo.

Součet S ale nemůže být současně sudý i lichý, takže takových pět čísel a, b, c, d, e nemůže existovat.

Druhý způsob (uspořádáním). Označme pět čísel $a < b < c < d < e$ podle velikosti. Součty splňují nerovnosti

$$\begin{array}{llllll} a + b < a + c < a + d < a + e & & & & < c + e \\ & < b + c & < b + d & < c + d & < c + e \\ & & & < b + e & < c + e & < d + e. \end{array}$$

Nejmenší dva součty jsou $a + b$ a $a + c$, takže musí platit $b = c - 1$. Podobně porovnáním největších dvou součtů $c + e$ a $d + e$ zjistíme $d = c + 1$. Platí tak

$$\begin{array}{llll} a + c - 1 < a + c < a + c + 1 < a + e & & & \\ & < 2c - 1 & < 2c & < 2c + 1 \\ & & & < c + e - 1 < c + e < c + e + 1. \end{array}$$

Jelikož každý řádek začíná blokem tří po sobě jdoucích čísel, zbývající číslo $a + e$, které jistě není nejmenší ani největší, musí být buď mezi prvním a druhým blokem, nebo mezi druhým a třetím blokem. Tyto dva případy rozebereme:

(i) V prvním případě by platilo $a + e = a + c + 2$ (protože $a + e$ navazuje na první blok) a současně $c + e - 1 = 2c + 2$ (protože třetí blok navazuje na druhý). Z první rovnice ale plyne $e = c + 2$, zatímco ze druhé plyne $e = c + 3$. Tento případ tedy nemůže nastat.

(ii) Ve druhém případě by podobně platilo $2c - 1 = a + c + 2$ (protože druhý blok navazuje na první) a současně $c + e - 1 = a + e + 1$ (protože třetí blok navazuje na $a + e$). Z rovnic postupně plyne $c = a + 3$ a $c = a + 2$, takže tento případ také nemůže nastat.

Ukázali jsme, že taková pětice čísel a, b, c, d, e neexistuje.

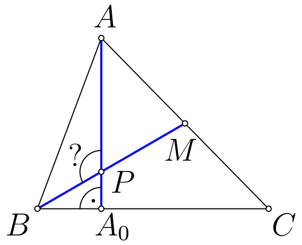
Poznámka. Lze ukázat, že v první části vyhovují právě čtveřice $(a, b, c, d) = (n, n+1, n+2, n+4)$ a čtveřice $(a, b, c, d) = (n, n+2, n+3, n+4)$ pro libovolné kladné celé číslo n.

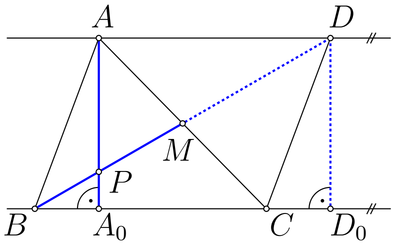
Poznámka. V části b) jsme ukázali, že hledaných 5 čísel neexistuje. Podobně jako v prvním způsobu lze ukázat, že platí dokonce silnější tvrzení: „Neexistuje 5 kladných celých čísel takových, že když se podíváme na součty libovolných dvou z nich, končí každý z těchto 10 součtů na jinou číslici.“

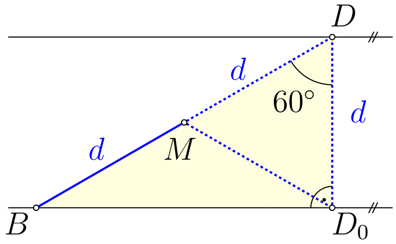
3. *V ostroúhlém trojúhelníku ABC platí, že výška z vrcholu A má stejnou délku jako těžnice z vrcholu B. Označme jejich průsečík P. Určete možné velikosti úhlu APB.*

Řešení. Odpověď: Úhel APB má vždy velikost $120°$.

Jako na levém obrázku označme A_0 patu výšky z vrcholu A a M střed strany AC. Těžnice z vrcholu B je úsečka BM a podle zadání platí $|BM| = |AA_0|$.







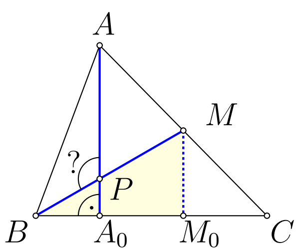
Pokud si nakreslíme trojúhelník ABC tak, že strana BC bude vodorovně, máme vlastně zjistit, jaký sklon má těžnice BM. Jako na prostředním obrázku označme D takový bod v rovině, že $ABCD$ je rovnoběžník. Jelikož M je střed jedné jeho úhlopříčky AC, je to i střed jeho druhé úhlopříčky BD. Označme D_0 patu kolmice z bodu D na přímku BC. Úsečky DD_0 a AA_0 jsou shodné, celkem tak dostáváme $|BM| = |MD| = |DD_0|$ (na pravém obrázku je tato velikost označena d).

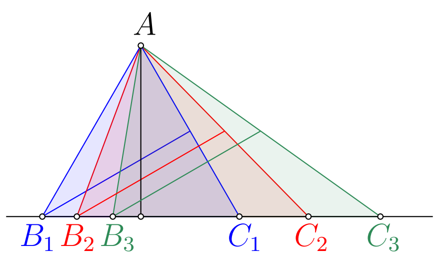
Podle Thaletovy věty (resp. věty opačné) je střed M přepony pravoúhlého trojúhelníku BDD_0 také středem jemu opsané kružnice. Proto platí $|MD_0| = |MD|$. Trojúhelník MDD_0 je tedy rovnostranný a $|\sphericalangle MDD_0| = |\sphericalangle BDD_0| = 60°$.

Přímky DD_0 a AA_0 jsou rovnoběžné, takže (souhlasné) úhly BDD_0 a BPA_0 jsou shodné. Hledaný úhel APB doplňuje $\sphericalangle BPA_0$ do přímého úhlu, tedy

$$|\sphericalangle APB| = 180° - 60° = 120°.$$

Poznámka. Dokreslení bodů D a D_0 není nutné, místo toho lze pracovat například se středem M strany AC a s patou M_0 kolmice z bodu M na přímku BC. Pak $|MM_0| = \frac{1}{2}|AA_0| = \frac{1}{2}|BM|$, takže v pravoúhlém trojúhelníku BMM_0 je přepona BM dvakrát delší než odvěsna MM_0. Trojúhelník BMM_0 proto odpovídá polovině rovnostranného trojúhelníku. Tedy $|\sphericalangle BMM_0| = 60°$ a řešení dokončíme podobně jako to vzorové.





Poznámka. Lze ukázat, že existuje nekonečně mnoho navzájem nepodobných trojúhelníků, ve kterých má výška z vrcholu A stejnou délku jako těžnice z vrcholu B. Tři takové trojúhelníky AB_1C_1, AB_2C_2, AB_3C_3 jsou nakreslené na pravém obrázku – mají společnou výšku z vrcholu A a rovnoběžné těžnice z vrcholů B_i.

4. *Máme čelovku a krabici s 21 označenými tužkovými bateriemi. Deset z nich je vybitých, ale jedenáct jich ještě funguje. V každém kroku můžeme dát do čelovky dvě baterie a pokud obě fungují, čelovka se rozsvítí. Po kolika nejméně krocích umíme zajistit, aby se čelovka určitě rozsvítila? (Nezapomeňte zdůvodnit, že méně kroků stačit nemusí.)*

Řešení. Odpověď: 12 kroků.

V první části řešení ukážeme, jak zajistit, že se čelovka rozsvítí po nejvýše 12 krocích. Náš postup bude následující: Jednu baterii, říkejme jí třeba Z, dáme bokem a zbylých 20 baterií rozdělíme do 10 dvojic, které si označíme (A_1, B_1), $(A_2, B_2), \ldots$, $(A_{10}B_{10})$. Nejdřív zvlášť vyzkoušíme každou z 10 dvojic (A_i, B_i) pro $i = 1, \ldots, 10$. Pokud se čelovka stále nerozsvítila, vyzkoušíme v následujících dvou krocích ještě baterii Z nejdřív s baterií A_1 a potom s baterií B_1.

Teď ukážeme, že náš postup jistě čelovku rozsvítí. Pokud zafunguje jedna z 10 dvojic (A_1, B_1), $(A_2, B_2), \ldots$, $(A_{10}B_{10})$, tak jsme uspěli nejpozději desátým krokem. V opačném případě musela každá z těchto 10 dvojic obsahovat alespoň jednu vybitou baterii. Vybitých baterií je ale celkem jen 10, takže každá tato dvojice musela ve skutečnosti obsahovat *přesně jednu* vybitou baterii. Takže jedna z baterií A_1, B_1 je dobrá a extra baterie Z je také dobrá. Proto když vyzkoušíme Z s A_1 i s B_1, tak jeden z těchto dvou pokusů zafunguje.

Ve druhé části řešení ukážeme, že neexistuje žádný zaručený postup na 11 nebo méně kroků. Představme si na chvíli, že by nějaký takový postup existoval. Takový postup je vlastně seznam jedenácti (nebo méně) dvojic zkoušených baterií. Abychom ukázali, že postup může selhat, stačí najít 10 baterií takových, že v každé zkoušené dvojici je alespoň jedna taková baterie – pokud totiž bude právě těchto 10 baterií vybitých, žádný krok čelovku nerozsvítí.

Pro postupy, které se skládají z $k \leqq 10$ kroků, je náš úkol snadný. Z první zkoušené dvojice vybereme libovolnou baterii. Pro každou další zkoušenou dvojici se podíváme, jestli tato dvojice obsahuje alespoň jednu z dříve vybraných baterií, a pokud ne, vybereme jednu další baterii z této dvojice. Tím dohromady vybereme nejvýše $k \leqq 10$ baterií a zajistíme, že z každé zkoušené dvojice je aspoň jedna baterie vybraná. (Případné zbývající vybité baterie až do celkového počtu 10 můžeme vybrat libovolně.)

Pro postupy, které se skládají z $k = 11$ kroků, učiníme nejdřív následující pozorování: některá baterie se v čelovce musela ocitnout opakovaně. Skutečně, během celého postupu jsme do čelovky celkem $11 \cdot 2 = 22$krát vložili nějakou baterii. Celkem máme jen 21 různých baterií, takže aspoň jedna baterie se v čelovce ocitla aspoň dvakrát. Označme B jednu takovou baterii a $t \geqq 2$ počet, kolikrát se v čelovce ocitla. V našem výběru 10 baterií začneme tím, že vybereme B. Tím jsme zajistili, že v $t \geqq 2$ krocích, ve kterých je B jedna ze zkoušených baterií, se čelovka nerozsvítí. Pro každý ze zbývajících $11 - t \leqq 9$ kroků postupujeme stejně jako výše: podíváme se, jestli zkoušená dvojice baterií obsahuje alespoň jednu z dříve vybraných baterií, a pokud ne, vybereme jednu další baterii z této dvojice. Tím jsme celkem vybrali nejvýše $1 + 9 = 10$ baterií. Pokud jsou zrovna tyto baterie vybité, čelovka se nikdy nerozsvítí, a tedy postup selže. Žádný zaručený postup na 11 nebo méně kroků tedy neexistuje.

Poznámka. Obecněji bychom se mohli ptát, kolik nejméně kroků je potřeba v případě, že máme čelovku na r baterií a k tomu celkem n baterií, z nichž k jich ještě funguje.

Tento optimální počet kroků se značí $T(n,k,r)$ a říká se mu *Turánovo číslo* na počest Pála Turána, který se těmito čísly poprvé zabýval v roce 1941. V řešení jsme ukázali, že $T(21,11,2)=12$. Podobně jde ukázat, že pro každé $k \geqq 2$ platí $T(2k-1,k,2)=k+1$. Přesná hodnota $T(n,k,r)$ je známá pro některé další trojice čísel (n,k,r), ale problém určení hodnot $T(n,k,r)$ pro každou trojici (n,k,r) je otevřený a předpokládá se, že je velmi těžký.