II. kolo kategorie Z8

Z8–II–1

Počítačový program vypisoval po řádcích čísla tvořená číslicemi od 1 do 9. Číslice byly použity opakovaně v přirozeném pořadí. Na každém řádku bylo o jednu číslici víc než na řádku předchozím, na prvním řádku byla 1:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 12 \\ 123 \\ \vdots \\ 123456789 \\ 1234567891 \\ 12345678912 \\ \vdots \end{array}$$

Výpis byl ukončen číslem na 2024. řádku.

Zjistěte, na kolika řádcích byla čísla dělitelná a) třemi, b) čtyřmi. (*P. Bak*)

Možné řešení. V obou případech nejprve zjistíme, jak se příslušná vlastnost mezi postupně tvořenými čísly opakuje:

a) Číslo je dělitelné třemi, právě když je jeho ciferný součet dělitelný třemi. Do ciferných součtů přispívají opakovaně čísla od 1 do 9, a ty mají po dělení třemi zbytky opakovaně 1, 2, 0. U tvořených čísel se tak zbytek po dělení ciferného součtu třemi opakuje po trojicích takto:

$$1, 0, 0; 1, 0, 0; \ldots$$

V každé takové trojici jsou dvě čísla dělitelná třemi.

Nejbližší násobek tří menší než 2024 je 2022 ($= 3 \cdot 674$). Tedy na prvních 2022 řádcích je 1348 čísel dělitelných třemi (674 trojic po dvou číslech dělitelných třemi). Číslo na 2023. řádku dělitelné třemi není, číslo na 2024. řádku dělitelné třemi je.

Čísla dělitelná třemi jsou na 1349 řádcích.

b) Číslo je dělitelné čtyřmi, právě když je jeho poslední dvojčíslí dělitelné čtyřmi. U tvořených čísel se poslední dvojčíslí opakují takto:

$$\_1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89; 91, 12, 23, \ldots$$

Až na úplně první číslo, které je jednomístné, se poslední dvojčíslí tvořených čísel opakují po devíticích. V každé takové devítici jsou dvě čísla dělitelná čtyřmi, a to 12 a 56.

Nejbližší násobek devíti menší než 2024 je 2016 ($= 9 \cdot 224$). Tedy na prvních 2016 řádcích je 448 čísel dělitelných čtyřmi (224 devític po dvou číslech dělitelných čtyřmi). Na zbylých osmi řádcích jsou koncová dvojčíslí 91, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, mezi nimiž jsou dvě dělitelná čtyřmi.

Čísla dělitelná čtyřmi jsou na 450 řádcích.

Poznámka. Také v případě b) lze sledovat posloupnost zbytků po dělení čtyřmi. Ty se u tvořených čísel opakují po devíticích takto:

$$1, 0, 3, 2, 1, 0, 3, 2, 1; 1, 0, 3, \ldots$$

V každé takové devítici jsou dvě čísla dělitelná čtyřmi. Další postup je stejný jako výše.

Hodnocení. V každém z obou případů udělte 1 bod za odhalení opakujícího se vzoru; 1 bod za výsledek; 1 bod za kvalitu komentáře.

Z8–II–2

Mezi hračkami v obchodě jsou pouze lodě a auta. Lodě tvoří čtvrtinu hraček. 75 % lodí a 40 % aut je červených. Červených hraček je o 10 méně než těch s jinou barvou.

Kolik hraček je v obchodě? (*E. Semerádová*)

Možné řešení. Poměrné zastoupení červených lodí mezi všemi hračkami je

$$\frac{75}{100} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}.$$

Poměrné zastoupení červených aut mezi všemi hračkami je

$$\frac{40}{100} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}.$$

Poměrné zastoupení červených hraček mezi všemi je

$$\frac{3}{16} + \frac{3}{10} = \frac{15 + 24}{80} = \frac{39}{80}.$$

Zejména počet všech hraček je dělitelný 80.

Pokud by všech hraček bylo 80, bylo by červených 39 a ostatních 41. V takovém případě by červených hraček bylo o 2 méně než těch s jinou barvou. Červených je však o 10 méně než ostatních a $10 = 5 \cdot 2$. Tedy všech hraček je $5 \cdot 80 = 400$.

V obchodě je 400 hraček.

Poznámka. Úvahu v závěrečné části řešení lze nahradit rovnicí

$$\frac{39}{80}h = \frac{41}{80}h - 10,$$

kde h značí počet hraček. Úpravami dostáváme $\frac{2}{80}h = 10$, a tedy $h = 400$.

Hodnocení. 3 body za poměrné zastoupení červených hraček mezi všemi hračkami; 3 body za počet hraček.

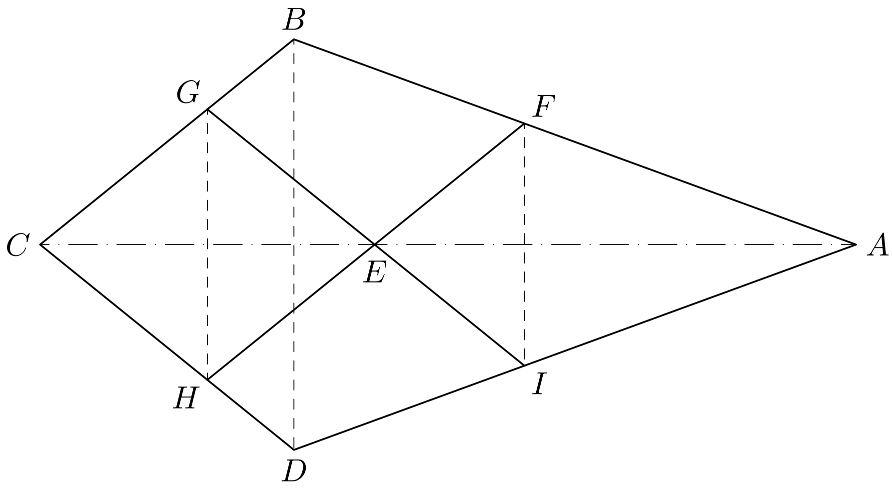
Z8–II–3

Deltoid je konvexní čtyřúhelník, který má dvě dvojice shodných sousedních stran.

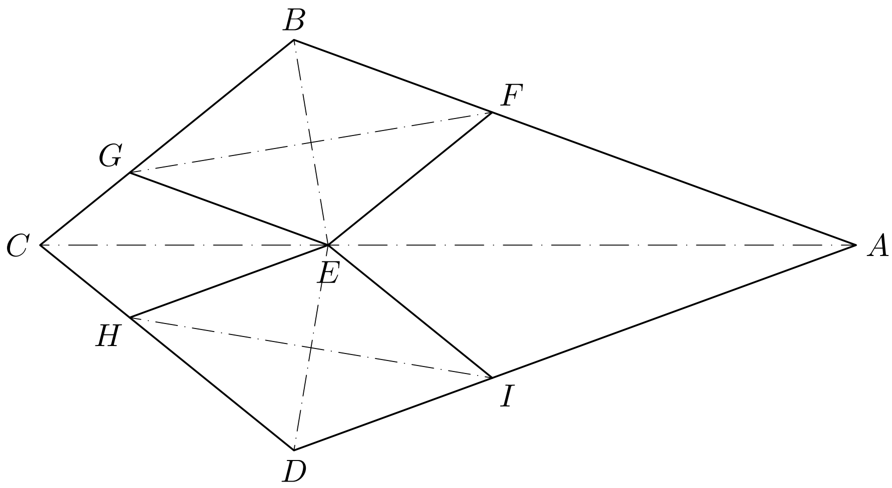
Sestrojte deltoid $ABCD$ se stranami AB a AD délky 11 cm, se stranami CB a CD délky 6 cm a s úhlopříčkou AC délky 15 cm. Rozdělte deltoid $ABCD$ na čtyři čtyřúhelníky tak, aby dva z nich byly deltoidy a dva byly shodné kosočtverce. Konstrukci popište a zdůvodněte. (*K. Pazourek*)

Možné řešení. Při rozboru úlohy využijeme toho, že deltoid je osově souměrný podle jedné své úhlopříčky, a tedy má navzájem kolmé úhlopříčky. Kosočtverec lze chápat jako speciální deltoid, který má všechny strany navzájem shodné a je souměrný podle obou úhlopříček.

Deltoid $ABCD$ ze zadání je osově souměrný podle úhlopříčky AC. Dělení deltoidu popíšeme pomocí bodů E, F, G, H, I takových, že E leží na úhlopříčce AC, body F, G leží na stranách AB, BC a body H, I jsou osově souměrné vzhledem ke G, F podle přímky AC. Nezávisle na poloze bodu E na úhlopříčce AC jsou čtyřúhelníky $AFEI$ a $EGCH$ deltoidy (příp. kosočtverce) a čtyřúhelníky $EFBG$ a $EHDI$ jsou shodné.

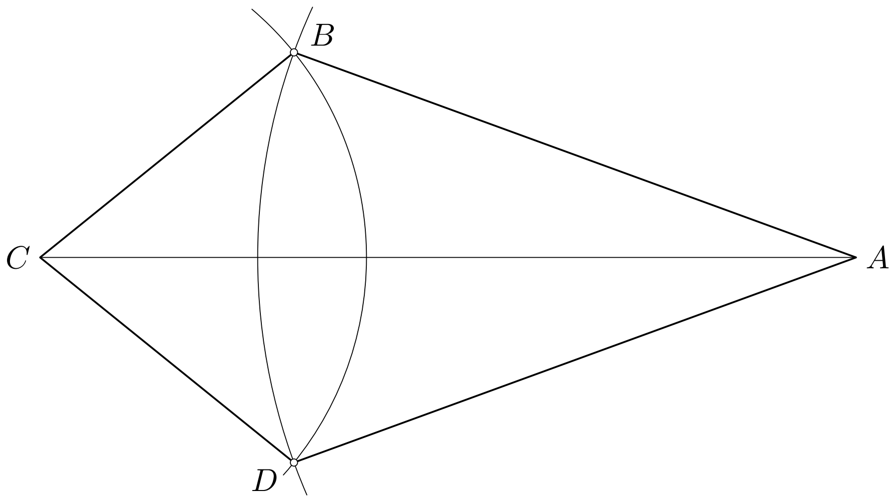


V kosočtverci jsou každé dva protější vnitřní úhly shodné. Protože úhly BCD a BAD shodné nejsou, čtyřúhelníky $AFEI$ a $EGCH$ nemohou být shodné kosočtverce. Uvažujeme tedy o takovém dělení, aby shodnými kosočtverci byly čtyřúhelníky $EFBG$ a $EHDI$. Vzhledem k tomu, že úhlopříčky v kosočtverci jsou jeho osami souměrnosti, je takové dělení určeno jednoznačně — v kosočtverci $EFBG$ je úhlopříčka BE osou úhlu ABC a úhlopříčka GF je osou úsečky BE, v kosočtverci $EHDI$ je tomu obdobně.



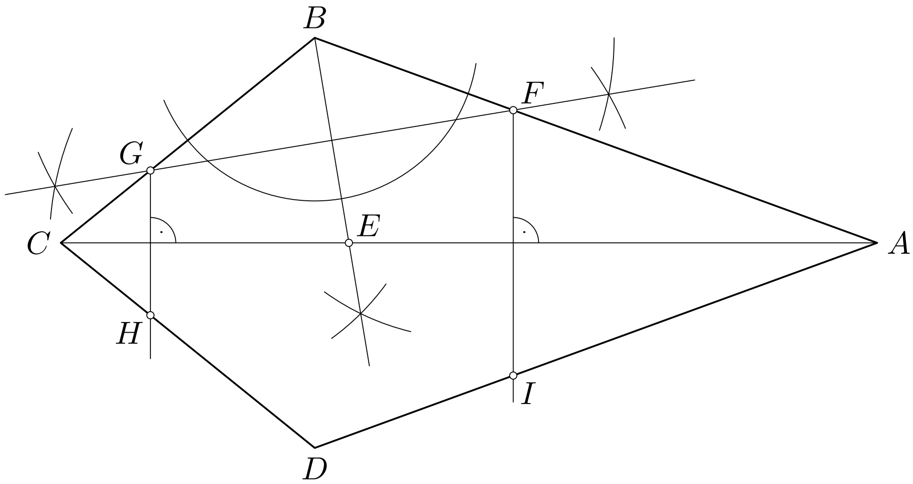
Konstrukce deltoidu:

1) úsečka AC délky 15 cm,
2) kružnice se středem A a poloměrem 11 cm,
3) kružnice se středem C a poloměrem 6 cm,
4) body B, D jsou průsečíky kružnic 2) a 3).



Konstrukce dělení:

5) osa úhlu ABC,
6) bod E je průsečíkem přímky 5) s úsečkou AC,
7) osa úsečky BE,
8) body F, G jsou po řadě průsečíky přímky 7) se stranami AB, BC,
9) kolmice k přímce AC jdoucí body F, G,
10) body H, I jsou po řadě průsečíky kolmic 9) se stranami CD, DA,
11) čtyřúhelníky $AFEI$, $EGCH$, $EFBG$, $EHDI$.



Poznámka. Uvedená konstrukce je odvozena z předchozího rozboru úlohy. V útvaru jsou další vztahy, které lze také při konstrukci použít. Např. platí, že body F, G, H, I leží na kružnici se středem v bodě E.

Hodnocení. 3 body za rozbor úlohy a určení podstatných vztahů; 1 bod za konstrukci deltoidu $ABCD$; 2 body za konstrukci dělení. Pro zisk plného počtu bodů není třeba vysvětlovat, zda existuje jiné řešení.