73. ročník Matematické olympiády (2023/24)

I. kolo kategorie Z9

Z9–I–1

Pat a Mat se vykoupali v rybníce a pak si dali závod do své chaloupky. V jistém okamžiku platilo, že kdyby Mat měl zdolánu polovinu vzdálenosti, kterou dosud uběhl, chyběl by mu do chaloupky trojnásobek oné poloviční vzdálenosti. V tomtéž okamžiku platilo, že kdyby Pat měl zdolán dvojnásobek vzdálenosti, kterou dosud uběhl, chyběla by mu do chaloupky třetina oné dvojnásobné vzdálenosti.

Kdo byl v daném okamžiku blíž chaloupce? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Pokud by Matovi do chaloupky chyběl trojnásobek uběhnuté vzdálenosti, pak by byl ve čtvrtině. Tento případ by nastal, kdyby měl zdolánu polovinu vzdálenosti, kterou dosud uběhl. Tedy Mat se v daném okamžiku nacházel v polovině mezi rybníkem a chaloupkou.

Pokud by Patovi do chaloupky chyběla třetina uběhnuté vzdálenosti, pak by byl ve třech čtvrtinách. Tento případ by nastal, kdyby měl zdolán dvojnásobek vzdálenosti, kterou dosud uběhl. Tedy Pat se v daném okamžiku nacházel ve třech osminách mezi rybníkem a chaloupkou.

V daném okamžiku byl blíž chaloupce Mat.

Poznámky. Pokud m a p po řadě značí Matovu a Patovu vzdálenost od rybníka v daném okamžiku a c značí celou vzdálenost mezi rybníkem a chaloupkou, potom informace ze zadání doslovně zapíšeme takto:

$$\frac{1}{2}m + 3\left(\frac{1}{2}m\right) = c, \quad 2p + \frac{1}{3}\,(2p) = c.$$

Odtud jednoduše dostáváme $2m = c$, tedy $m = \frac{1}{2}c$, a $\frac{8}{3}p = c$, tedy $p = \frac{3}{8}c$.

Z9–I–2

Sestrojte kosočtverec $ABCD$, ve kterém platí $|AC| = 8\,\mathrm{cm}$ a $|AS| = 7\,\mathrm{cm}$, kde S je středem strany CD. (*K. Pazourek*)

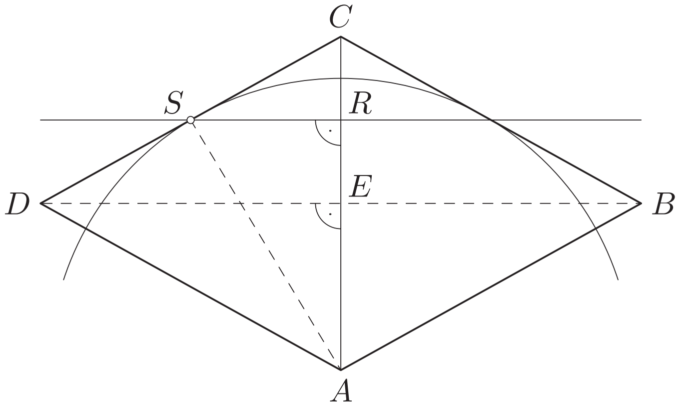
Možné řešení. Využijeme toho, že úhlopříčky v rovnoběžníku se navzájem půlí a v kosočtverci jsou navíc kolmé.

Označme průsečík úhlopříček AC a BD jako E a střed úsečky EC jako R. Úsečka SR je střední příčkou trojúhelníku DEC, která je rovnoběžná se stranou DE. Úsečka SR je proto kolmá na AC. V pravoúhlém trojúhelníku ARS známe velikost přepony $|AS| = 7\,\mathrm{cm}$ a velikost odvěsny $|AR| = \frac{3}{4}|AC| = 6\,\mathrm{cm}$. Vzhledem k tomu, že $7 > 6$, takový trojúhelník opravdu existuje a lze sestrojit např. takto:

- úsečka AR s velikostí 6 cm,
- kolmice k úsečce AR jdoucí bodem R,
- kružnice se středem v bodě A a poloměrem 7 cm,
- bod S je průsečíkem kolmice a kružnice.

Zbylé vrcholy kosočtverce, lze sestrojit následovně:

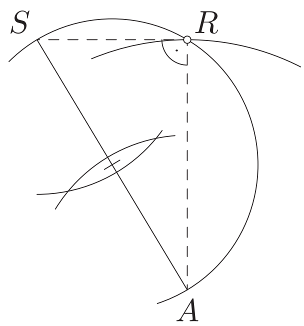
- bod C leží na polopřímce AR ve vzdálenosti 8 cm od A,
- bod D je středově souměrný s bodem C podle středu S,
- bod B je osově souměrný s bodem D podle osy AC.



Poznámky. Hlavní pozornost věnujeme konstrukci trojúhelníku ARS. Konstrukce souměrných bodů D a B pokládáme za dobře známé, tedy detailně nerozepisujeme. Průsečíky ve čtvrtém kroku konstrukce jsou dva; druhá možnost vede k témuž řešení s jinak označenými vrcholy.

Dílčí konstrukce lze realizovat různě. Např. pro danou úsečku AC lze body E a R po řadě sestrojit jako středy úseček AC a EC, bod D lze sestrojit jako průsečík přímky CS s kolmicí k AC jdoucí bodem E, apod. Pravoúhlý trojúhelník ARS je možné sestrojit také takto:

- úsečka AS s velikostí 7 cm,
- kružnice se středem v bodě A a poloměrem 6 cm,
- kružnice s průměrem AS,
- bod R je průsečíkem kružnic.



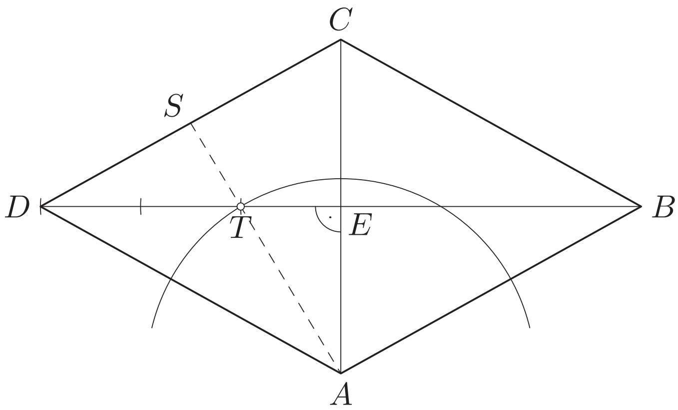
Podle Thaletovy věty je úhel u vrcholu R vskutku pravý.

Trojúhelníky ACB a ACD vypadají téměř rovnostranně, ale nejsou. Zejména neplatí, že se kružnice v prvním obrázku dotýká úsečky CD, i když to tak může vypadat.

Jiné řešení. Využijeme toho, že úsečky AS a DE jsou těžnicemi trojúhelníku ACD. Navíc si uvědomujeme, že úhlopříčky v kosočtverci jsou navzájem kolmé.

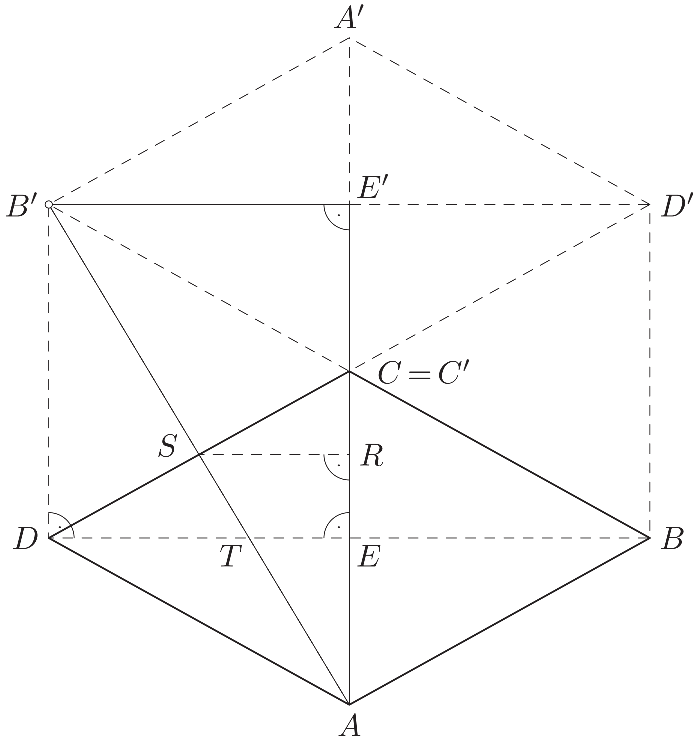
Označme průsečík úhlopříček AC a BD jako E a průsečík těžnic AS a DE, tj. těžiště, jako T. Těžiště leží ve třetině každé těžnice, blíže straně trojúhelníku. V pravoúhlém trojúhelníku AET tedy známe velikost přepony $|AT| = \frac{2}{3}|AS| = \frac{14}{3}\,\mathrm{cm}$ a velikost odvěsny $|AE| = \frac{1}{2}|AC| = 4\,\mathrm{cm}$. Vzhledem k tomu, že $\frac{14}{3} > 4$, trojúhelník AET opravdu existuje a lze sestrojit podobně jako trojúhelník ARS v řešení uvedeném výše. Zbylé vrcholy kosočtverce, lze sestrojit např. takto:

- bod D leží na polopřímce ET ve vzdálenosti $3|ET|$ od E,
- bod B je středově souměrný s bodem D podle středu E,
- bod C je středově souměrný s bodem A podle středu E.



Poznámky. V uvedeném řešení je zapotřebí rozdělit danou úsečku na třetiny. Korektní řešení tohoto podúkolu pokládáme za dobře známé, tedy detailně nerozepisujeme.

Předchozí poznámka souvisí s faktem, že trojúhelníky AET a ARS jsou podobné s koeficientem podobnosti 2/3. Vhodným rozšířením diskutovaného útvaru lze objevit další vztahy a na nich založit alternativní konstrukce. Pokud body A', B', D', E' značí po řadě body souměrné s A, B, D, E podle středu C, potom např. čtyřúhelník $ACB'D$ je rovnoběžníkem, čtyřúhelník $DEE'B'$ je obdélníkem, trojúhelník $AE'B'$ je podobný s trojúhelníkem ARS (tedy i AET) apod.



Z9–I–3

V základní škole U Tří dubů, kam chodí i Zikmund, každoročně pořádají vědomostní soutěž, v níž každý soutěžící může získat nejvíce 15 bodů. Letos byl průměrný bodový zisk soutěžících zaokrouhlený na desetiny roven 10,4. Zikmund si po soutěži uvědomil, že jednu otázku si špatně přečetl a odpovídal na něco jiného. Mohl tak mít o 4 body více a průměrný bodový zisk zaokrouhlený na desetiny by se tím zvýšil na 10,6.

Určete, kolik nejméně a kolik nejvíce dětí letos U tří dubů soutěžilo. (*M. Petrová*)

Možné řešení. Pracujeme se zaokrouhlenými čísly, tedy skutečný průměrný bodový zisk mohl být v rozmezí od 10,35 včetně po 10,45 vyjma (toto číslo se již zaokrouhluje na 10,5). Pokud n značí počet účastníků soutěže a c celkový součet bodů získaných všemi soutěžícími, potom předchozí podmínku zapíšeme takto:

$$10{,}35 \leqq \frac{c}{n} < 10{,}45. \tag{1}$$

Obdobnou úvahou zjišťujeme, že další podmínka ze zadání znamená:

$$10{,}55 \leqq \frac{c+4}{n} < 10{,}65. \tag{2}$$

Vzhledem k tomu, že $\frac{c+4}{n} = \frac{c}{n} + \frac{4}{n}$ a že sčítanec $\frac{c}{n}$ je omezen v (1), z podmínky (2) postupně dostáváme:

$$10{,}55 - \frac{c}{n} \leqq \frac{4}{n} < 10{,}65 - \frac{c}{n},$$

$$0{,}1 < \frac{4}{n} < 0{,}3. \tag{3}$$

Dalšími ekvivalentními úpravami najdeme omezení pro n:

$$10 > \frac{n}{4} > \frac{10}{3},$$
$$40 > n > \frac{40}{3}.$$

Těmto omezením vyhovují všechna přirozená čísla od 14 do 39.

Soutěže se zúčastnilo nejméně 14 a nejvíce 39 dětí.

Poznámky. Všimněte si, že v omezeních (3) jsou obě nerovnosti ostré: pro spodní odhad odečítáme od 10,55 největší možnou hodnotu $\frac{c}{n}$, a ta je ostře menší než 10,45; pro horní odhad odečítáme od hodnoty ostře menší než 10,65 nejmenší možnou hodnotu $\frac{c}{n}$, a ta je 10,35. Informace o maximálním počtu bodů, které může získat každý soutěžící, je nadbytečná.

Náznak jiného řešení. K možným počtům soutěžících se lze dopracovat i zkoušením možností. Za předpokladu, že hodnoty průměrných bodových zisků jsou přesné, by podmínky (1) a (2) byly nahrazeny rovnostmi

$$\frac{c}{n} = 10{,}4, \qquad \frac{c+4}{n} = 10{,}6.$$

Dosazením první rovnosti do druhé a úpravou dostáváme $\frac{4}{n} = 0{,}2$, tedy $n = 20$. To je vyhovující počet soutěžících a ostatní vyhovující možnosti lze najít zkoušením okolních čísel a ověřováním podmínek ze zadání. Není nutné postupovat úplně systematicky, stačí najít mezní hodnoty, pro které podmínky platí, ale pro následovníka, resp. předchůdce neplatí. Např. ověření pro horní omezení počtu soutěžících vypadá následovně:

- Podmínka (1) pro $n = 39$ a její postupné úpravy dávají

$$10{,}35 \leqq \frac{c}{39} < 10{,}45,$$
$$403{,}65 \leqq c < 407{,}55,$$
$$407{,}65 \leqq c + 4 < 411{,}55,$$
$$10{,}4525541 \leqq \frac{c+4}{39} < 10{,}5525641.$$

  Tato omezení nejsou ve sporu s omezeními (2), pouze je zpřesňují. Tedy počet soutěžících mohl být 39.

- Podmínka (1) pro $n = 40$ a její postupné úpravy dávají

$$10{,}35 \leqq \frac{c}{40} < 10{,}45,$$
$$414 \leqq c < 418,$$
$$418 \leqq c + 4 < 422,$$
$$10{,}45 \leqq \frac{c+4}{40} < 10{,}55.$$

  Tato omezení jsou ve sporu s omezeními (2) — žádné číslo není ostře menší než 10,55 a současně větší nebo rovno 10,55. Tedy počet soutěžících nemohl být 40.

Z9–I–4

Kája měl vynásobit dvě dvojmístná čísla. Z nepozornosti zaměnil pořadí číslic v jednom z činitelů a dostal součin, který byl o 4 248 menší než správný výsledek.

Kolik mělo Kájovi správně vyjít? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Označme x a y Kájova dvojmístná čísla a dejme tomu, že číslice zaměnil v prvním čísle. Pokud číslice čísla x označíme a a b, potom platí

$$(10a + b)y - (10b + a)y = 4248.$$

Po úpravě dostáváme $9(a - b)y = 4248$ neboli $(a - b)y = 472$. Odtud vyplývá, že číslo y je dvojmístným dělitelem čísla 472.

Prvočíselný rozklad čísla 472 je $472 = 2^3 \cdot 59$, tedy jeho jediným dvojmístným dělitelem je 59. To znamená, že $a - b = 8$. Této podmínce vyhovují následující dvě možnosti:

- $a = 8$, $b = 0$, tedy $(10a + b)y = 80 \cdot 59 = 4720$,
- $a = 9$, $b = 1$, tedy $(10a + b)y = 91 \cdot 59 = 5369$.

Kájovi mělo správně vyjít buď 4720, nebo 5369.

Poznámka. Při záměně číslic v prvním případě dostáváme 08. To sice dává vyhovující řešení ($80 \cdot 59 - 8 \cdot 59 = 4248$), ale nejedná se o dvojmístné číslo. Nechce se věřit, že by si Kája tohoto faktu i při své nepozornosti nevšiml. Vyloučení této možnosti proto nepovažujeme za chybu.

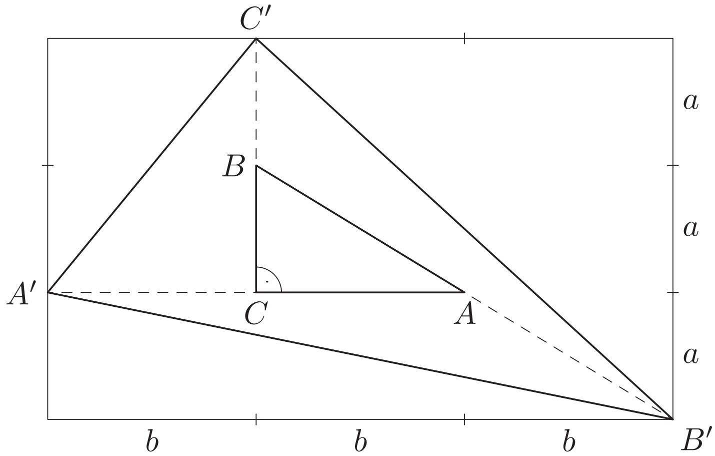
Z9–I–5

Trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C. Body A', B', C' jsou obrazy bodů A, B, C postupně ve středových souměrnostech se středy C, A, B. Dokažte, že platí

$$|A'B'|^2 + |B'C'|^2 + |C'A'|^2 = 14 \cdot |AB|^2.$$

(*J. Zhouf*)

Možné řešení. Vzhledem ke směrům odvěsen trojúhelníku ABC opíšeme trojúhelníku $A'B'C'$ obdélník jako na následujícím obrázku. Při obvyklém značení $a = |BC|$ a $b = |AC|$ mají strany tohoto obdélníku velikosti $3a$ a $3b$:



Každá ze stran trojúhelníku $A'B'C'$ je přeponou pravoúhlého trojúhelníku, jehož hlavní vrchol leží v některém z vrcholů opsaného obdélníku. Podle Pythagorovy věty tak postupně odvozujeme, že

$$|A'B'|^2 = a^2 + (3b)^2 = a^2 + 9b^2,$$
$$|B'C'|^2 = (3a)^2 + (2b)^2 = 9a^2 + 4b^2,$$
$$|A'C'|^2 = (2a)^2 + b^2 = 4a^2 + b^2.$$

Součtem těchto tří vyjádření a s pomocí Pythagorovy věty v trojúhelníku ABC vskutku dostáváme

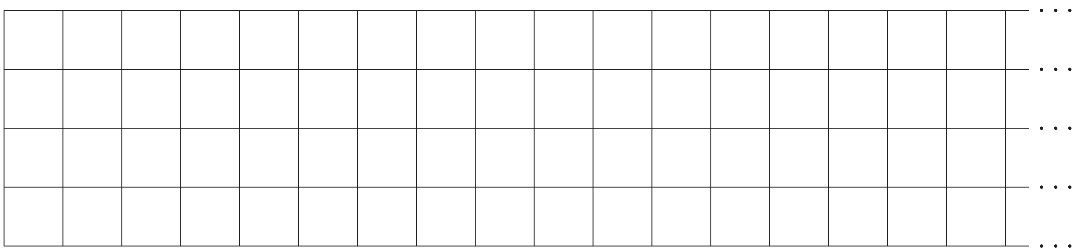
$$|A'B'|^2 + |B'C'|^2 + |C'A'|^2 = 14a^2 + 14b^2 = 14 \cdot |AB|^2.$$

Z9–I–6

Níže je naznačena část čtvercové sítě sestávající ze 4 řádků a 2023 sloupců.

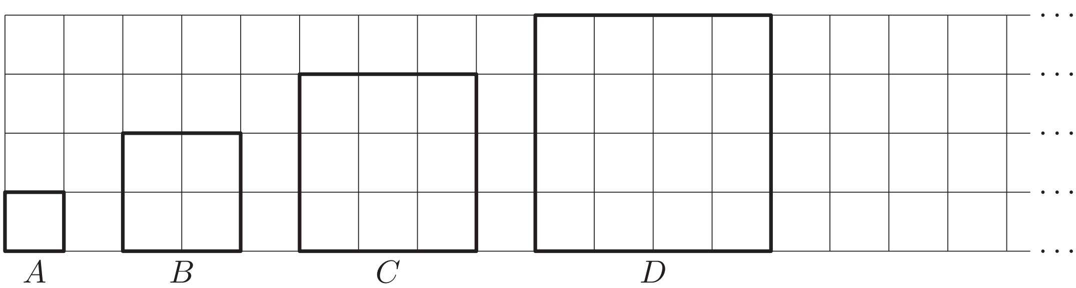
Určete počet čtverců, jejichž všechny vrcholy jsou uzlovými body čtvercové sítě.

(*K. Pazourek*)

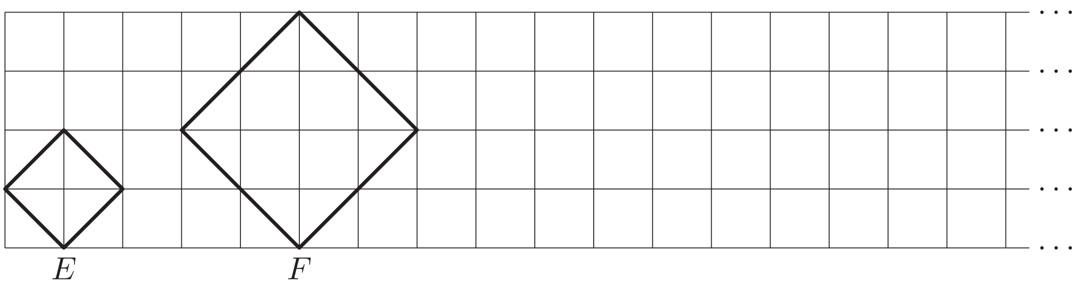


Možné řešení. Nejmenší čtverec s vrcholy v uzlových bodech má rozměry 1×1, největší má rozměry 4×4. V rámci těchto omezení najdeme další případy, které rozlišíme následovně.

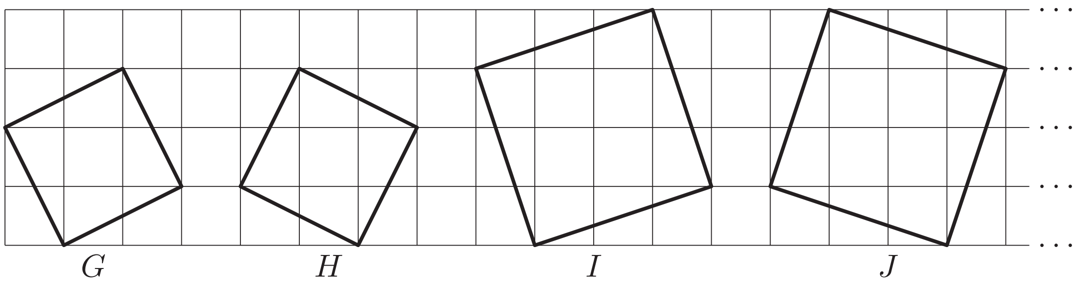
- Čtverce se stranami rovnoběžnými vzhledem k síti:



- Čtverce se stranami úhlopříčnými vzhledem k síti:



- Ostatní čtverce:



Pro vlastní počítání čtverců jistého typu není podstatné jejich natočení, ale pouze kolik jednotek zabírají ve vodorovném a svislém směru. Tedy čtverců typu B je v síti stejný počet jako čtverců typu E. Čtverců typu C je v síti stejný počet jako čtverců typu G, resp. H. Čtverců typu D je v síti stejný počet jako čtverců typu F, což je stejně jako čtverců typu I, resp. J.

Stačí tedy spočítat čtverce čtyř typů:

- Čtverec typu A můžeme ve svislém směru umístit čtyřmi způsoby, ve vodorovném směru 2 023 způsoby. Takových čtverců je

$$4 \cdot 2\,023 = 8\,092.$$

- Čtverec typu B (resp. E) můžeme ve svislém směru umístit třemi způsoby, ve vodorovném směru 2 022 způsoby. Takových čtverců je

$$3 \cdot 2\,022 = 6\,066.$$

- Čtverec typu C (resp. G, H) můžeme ve svislém směru umístit dvěma způsoby, ve vodorovném směru 2 021 způsoby. Takových čtverců je

$$2 \cdot 2\,021 = 4\,042.$$

- Čtverec typu D (resp. F, I, J) můžeme ve svislém směru umístit jediným způsobem, ve vodorovném směru 2 020 způsoby. Takových čtverců je

$$1 \cdot 2\,020 = 2\,020.$$

Počet čtverců, jejichž všechny vrcholy jsou uzlovými body sítě, je

$$1 \cdot 8\,092 + 2 \cdot 6\,066 + 3 \cdot 4\,042 + 4 \cdot 2\,020 = 40\,430.$$