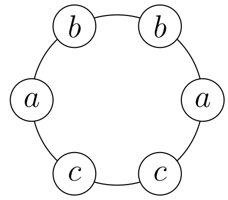
73. ročník Matematické olympiády (2023/2024)

Úlohy školního kola kategorie B



1. Přirozená čísla a, b, c jsou umístěna do kruhu jako na obrázku, přičemž každé číslo je dělitelem součtu dvou čísel s ním sousedících. Kolik nejvíce z čísel a, b, c může být různých?

2. Nechť $ABCD$ je obdélník se středem S a delší stranou AB. Kolmice k přímce BD procházející vrcholem B protne přímku AC v bodě E. Rovnoběžka s přímkou BE vedená středem S protne stranu CD v bodě F. Předpokládejme, že $|CE| = |BC|$.

a) Určete velikost úhlu BSC.

b) Dokažte, že $|DF| = 2\,|CF|$.

3. Pro nenulová reálná čísla a, b, c platí

$$a^2(b+c) = b^2(c+a) = c^2(a+b).$$

Určete všechny možné hodnoty výrazu

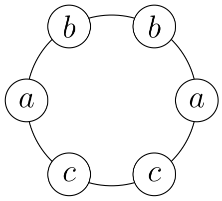
$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Školní kolo kategorie B se koná

v úterý 30. ledna 2024

tak, aby začalo nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. *Přirozená čísla a, b, c jsou umístěna do kruhu jako na obrázku, přičemž každé číslo je dělitelem součtu dvou čísel s ním sousedících. Kolik nejvíce z čísel a, b, c může být různých?* (Josef Tkadlec)



Řešení. Dokážeme, že nutně platí $b = c$, tudíž mezi čísly a, b, c mohou být nejvýše dvě různá. Počtu 2 dosáhneme například v případě čísel $a = 2$ a $b = c = 1$, která zřejmě mají požadovanou vlastnost.

Předpokládejme tedy, že přirozená čísla a, b, c vyhovují zadání úlohy. To lze vyjádřit třemi podmínkami:

1. $a \mid b + c$ neboli $b + c = ma$ pro některé přirozené číslo m,
2. $b \mid a + b$ neboli $b \mid a$,
3. $c \mid a + c$ neboli $c \mid a$.

Z $b \mid a$ plyne, že číslo b dělí oba členy na pravé straně upravené rovnosti $c = ma - b$, a tudíž rovněž $b \mid c$. Podobně z $c \mid a$ a $b = ma - c$ plyne $c \mid b$. Pro přirozená čísla b, c vztahy $b \mid c$ a $c \mid b$ už znamenají, že $b = c$, jak jsme slíbili dokázat.

Jiné řešení. Namísto rovnosti $b = c$ z prvního řešení dokážeme jen, že přirozená čísla a, b a c, pro něž platí $a \mid b + c$, $b \mid a$ a $c \mid a$, nemohou být navzájem různá.

Předpokládejme tedy, že platí $a \neq b$ a $a \neq c$. Pak ze vztahů $b \mid a$ a $c \mid a$ plynou nerovnosti $a \geqq 2b$ a $a \geqq 2c$. Jejich sečtením dostaneme $a + a \geqq 2b + 2c$ neboli $a \geqq b + c$, kde díky vztahu $a \mid b + c$ musí nastat rovnost $a = b + c$. Musí proto rovněž platit obě rovnosti $a = 2b$ a $a = 2c$ (jinak by aspoň jedna z nerovností $a \geqq 2b$, $a \geqq 2c$ byla ostrá a platilo by pak $a > b + c$), ze kterých ovšem plyne $b = c$. Proto všechny tři nerovnosti $a \neq b$, $a \neq c$ a $b \neq c$ nemohou platit současně.

Poznámka. I když to zadání úlohy nevyžaduje, ukážeme dokonce dvěma způsoby, že všechny vyhovující trojice (a, b, c) jsou tvaru (b, b, b) a $(2b, b, b)$, kde b je libovolné přirozené číslo.

Při prvním postupu využijeme rovnost $b = c$, kterou jsme dokázali v prvním řešení. Díky ní se podmínky $b + c = ma$, $b \mid a$ a $c \mid a$ zredukují na vztahy $2b = ma$ a $b \mid a$. Jelikož z $b \mid a$ plyne $2b \leqq 2a$, v rovnosti $2b = ma$ musí být $m = 1$ nebo $m = 2$. Trojice (a, b, c) je podle toho rovna $(2b, b, b)$, resp. (b, b, b).

Při druhém postupu vyjádříme podmínky $a \mid b + c$, $b \mid a$ a $c \mid a$ vztahy

$$b + c \in \{a, 2a, 3a, 4a, \dots\} \quad \text{a} \quad b, c \in \left\{a, \tfrac{1}{2}a, \tfrac{1}{3}a, \tfrac{1}{4}a, \dots\right\}.$$

Ze druhého vztahu plyne $b + c \leqq 2a$, tudíž podle prvního vztahu buď platí $b + c = a$, a to právě když $b = c = \frac{1}{2}a$, nebo platí $b + c = 2a$, a to právě když $b = c = a$. Tím je potřebný závěr dokázán.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za správnou odpověď a 5 bodů za důkaz tvrzení, že a, b, c nemohou být tři různá čísla. Bod za správnou odpověď ovšem přiznejte, jen když je k ní uvedena aspoň jedna vyhovující trojice (a, b, c), například $(2, 1, 1)$ nebo $(2b, b, b)$. Z 5 bodů za důkaz udělte 1 bod za zápis (třeba i slovní) všech tří dělitelností $a \mid b + c$, $b \mid a$, $c \mid a$ a další 1 bod za aspoň jednu z nerovností $a \leqq b + c$, $b \leqq a$, $c \leqq a$. Za všechny tři nerovnosti a výsledek $b + c \leqq 2a$ sečtení posledních dvou z nich udělte 3 body (viz druhý postup z poznámky). Při postupu podobném tomu z jiného řešení udělte 2 body za aspoň jednu z nerovností $a \geqq 2b$ nebo $a \geqq 2c$ a další 1 bod za jejich sečtení.

2. *Nechť $ABCD$ je obdélník se středem S a delší stranou AB. Kolmice k přímce BD procházející vrcholem B protne přímku AC v bodě E. Rovnoběžka s přímkou BE vedená středem S protne stranu CD v bodě F. Předpokládejme, že $|CE| = |BC|$.*

a) Určete velikost úhlu BSC.
b) Dokažte, že $|DF| = 2\,|CF|$.

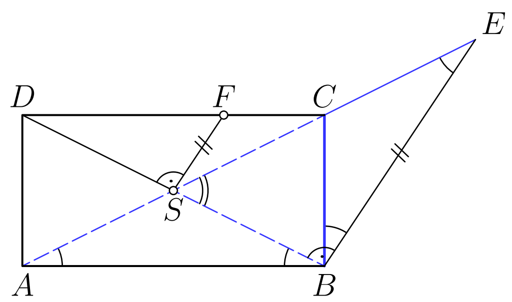
(Jaroslav Švrček)

Řešení. Popíšeme několik postupů řešení obou částí a) i b). Bez komentáře v nich budeme využívat známé rovnosti $|AS| = |BS| = |CS| = |DS|$. Zdůrazněme ještě, že podmínka $|AB| > |BC|$ ze zadání úlohy zaručuje, že bod E leží na prodloužení úhlopříčky AC za bod C.

Část a), postup 1. Bod C leží na přeponě SE pravoúhlého trojúhelníku SBE. Současně leží na ose jeho odvěsny BE, neboť $|CB| = |CE|$ podle zadání. Z Thaletovy věty tudíž plyne, že kružnice opsaná tomuto trojúhelníku má střed právě v bodě C. Platí proto rovnosti $|CB| = |CE| = |CS| = |BS|$, odkud plyne, že trojúhelník BSC je rovnostranný. Hledaná velikost úhlu BSC je proto $60°$.

Část a), postup 2. Úhly EBS a CBA jsou pravé, a tedy shodné, a úhel CBS je jejich společnou částí, a proto i úhly EBC a SBA jsou shodné. Z rovnoramenných trojúhelníků BEC a ABS však plyne $|\sphericalangle EBC| = |\sphericalangle CEB|$ a $|\sphericalangle SBA| = |\sphericalangle BAS|$. Platí tudíž $|\sphericalangle CEB| = |\sphericalangle BAS|$ neboli $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle BAE|$, a proto je také trojúhelník EAB rovnoramenný a platí $|BE| = |AB|$. Rovnoramenné trojúhelníky BEC a ABS jsou tudíž podle věty *usu* shodné. Platí proto $|BC| = |BS| = |CS|$, trojúhelník BSC je tedy rovnostranný, odkud $|\sphericalangle BSC| = 60°$.

Část a), postup 3. Označme φ velikost úhlů při základně BE rovnoramenného trojúhelníku BEC. S ohledem na $|\sphericalangle EBS| = 90°$ je pak $90° - \varphi$ velikost úhlů při základně BC rovnoramenného trojúhelníku BCS, a proto jeho třetí úhel BSC má velikost 2φ. Trojúhelník SBE tak má vnitřní úhly velikostí $90°$, φ a 2φ, platí tudíž $\varphi + 2\varphi = 90°$, odkud $\varphi = 30°$, a proto $|\sphericalangle BSC| = 2\varphi = 60°$.



Část b), postup 1. Úhel FSD je stejně jako úhel EBD pravý, neboť $FS \parallel EB$ podle zadání. Z řešení části a) víme, že BSC je rovnostranný trojúhelník. Rovnoramenný trojúhelník CDS má proto vnitřní úhly velikostí $30°$, $30°$ a $120°$. Odtud pro vnitřní úhly trojúhelníku CFS vychází

$$|\sphericalangle FCS| = |\sphericalangle DCS| = 30° \quad \text{a} \quad |\sphericalangle CSF| = |\sphericalangle CSD| - |\sphericalangle FSD| = 120° - 90° = 30°,$$

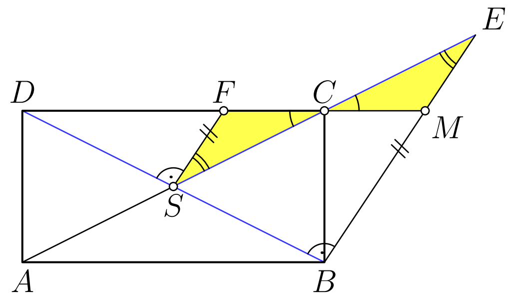
takže CFS je rovnoramenný trojúhelník a platí $|SF| = |CF|$. Namísto rovnosti $|DF| = 2\,|CF|$ tudíž stačí dokázat rovnost $|DF| = 2\,|SF|$. Ta však jak známo plyne z pravoúhlého trojúhelníku FDS, neboť $|\sphericalangle FDS| = 30°$.*

Část b), postup 2. Ukažme, že pravoúhlý trojúhelník FDS lze využít i jinak. Označme $d = |CS| = |BS| = |DS|$. Z řešení části a) víme, že také $|BC| = d$, což spolu s $|DB| = 2d$ vede podle Pythagorovy věty k rovnosti $|DC| = d\sqrt{3}$. Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků FDS a BDC máme $|DF|/|DS| = |DB|/|DC|$, odkud pro délku úsečky DF vychází

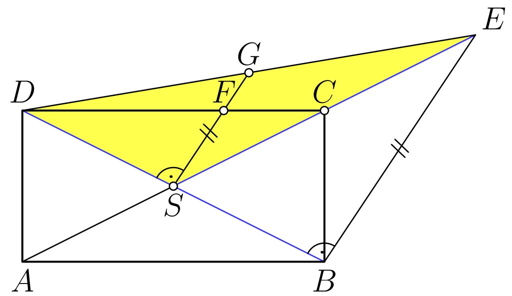
$$|DF| = \frac{|DB|\cdot|DS|}{|DC|} = \frac{2d\cdot d}{d\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\cdot d\sqrt{3} = \frac{2}{3}\,|DC|.$$

To už zřejmě znamená, že platí $|DF| = 2\,|CF|$, jak jsme měli dokázat.

Část b), postup 3. Označme M průsečík přímek CD a BE. Jelikož S je střed úsečky BD a $SF \parallel BM$, je úsečka SF střední příčka trojúhelníku BMD, tudíž platí $|DF| = |FM|$. Naší úlohou je proto ukázat, že C je střed úsečky FM. K tomu stačí ověřit, že jsou shodné trojúhelníky CFS a CME. Ty ovšem mají shodné vrcholové úhly při společném vrcholu C a rovněž shodné střídavé úhly při vrcholech F a M; konečně jsou shodné i jejich strany CS a CE, jak jsme ukázali v řešeních části a). Podle věty *usu* jsou tedy trojúhelníky CFS a CME skutečně shodné.



Část b), postup 4. Označme G střed úsečky DE. Pak SG je střední příčka trojúhelníku BDE, a tudíž kromě $FS \parallel BE$ platí i $SG \parallel BE$. Proto bod F leží na příčce SG, která je zároveň těžnicí trojúhelníku SED. Také úsečka DC je jeho těžnicí, neboť $|CS| = |CE|$ podle řešení části a). Průsečík F těchto dvou těžnic je tedy těžištěm trojúhelníku SED, a proto platí $|DF| = 2\,|CF|$, jak jsme měli dokázat.

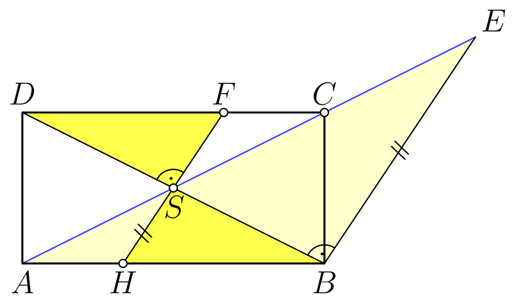


* Plyne to z pozorování, že rovnostranný trojúhelník je svou výškou rozdělen na dva shodné trojúhelníky s úhly 30°, 60°, 90°. Je možné také přímo využít odtud plynoucí rovnost $\sin 30° = \frac{1}{2}$.

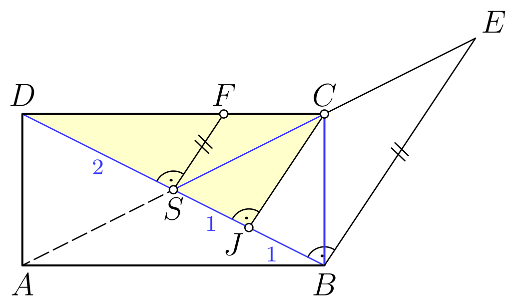
Část b), postup 5. Označme H průsečík přímky SF se stranou AB. Ze středové souměrnosti obdélníku $ABCD$ a z podobnosti trojúhelníků AHS a ABE (věta *uu*) plyne

$$\frac{|DF|}{|CF|} = \frac{|BH|}{|AH|} = \frac{|BA|}{|AH|} - 1 = \frac{|EA|}{|AS|} - 1 = \frac{|ES|}{|AS|}.$$

Podle řešení části a) ovšem platí $|EC| = |CS| = |SA|$, takže $|ES|/|AS| = 2$, a proto rovněž $|DF|/|CF| = 2$, jak jsme měli dokázat.



Část b), postup 6. Označme J střed úsečky BS. Podle řešení části a) je trojúhelník BSC rovnostranný, takže úsečka CJ je jeho výška. Nyní z $CJ \perp BD$ a $FS \perp BD$ plyne, že trojúhelníky CDJ a FDS jsou podle podle věty *uu* podobné. Proto ze zřejmé rovnosti $|DS| = \frac{2}{3}|DJ|$ plyne rovněž $|DF| = \frac{2}{3}|DC|$. To už znamená, že skutečně platí $|DF| = 2\,|CF|$.



Za úplné řešení udělte 6 bodů, po 3 bodech za každou z částí a) a b). V případě neúplných postupů oceňte dílčí kroky následovně:

A1. Důkaz rovnosti $|AB| = |BE|$: 1 bod.

A2. Důkaz rovnosti $|SC| = |CE|$ (nebo tvrzení, že C je střed kružnice opsané trojúhelníku BSE): 2 body.

A3. Je-li řešení části a) založeno na výpočtech úhlů (jako v našem postupu 3), udělte:

- ▷ 1 bod za označení neznámé velikosti (řekněme φ) jednoho z úhlů u vrcholu B, C, S nebo E s cílem vyjádřit pomocí φ velikosti dalších úhlů potřebných k výpočtu této neznámé.
- ▷ 1 bod za zmíněná vyjádření vedoucí k sestavení rovnice pro jednu neznámou φ (na základě součtu 180° vnitřních úhlů vhodného trojúhelníku nebo rovnosti $|\sphericalangle EBS| = 90°$ či rovnoramennosti jednoho z trojúhelníků BEC nebo BCS).
- ▷ 1 bod za vyřešení sestavené rovnice a určení hodnoty $|\sphericalangle BSC| = 60°$.

  Za zavedení více než jedné neznámé žádný bod neudělujte, dokud není buď jejich eliminací získána rovnice s 1 neznámou (za 2 body), nebo je zapsána soustava rovnic, která má jediné řešení (rovněž za 2 body).

B1. Důkaz, že trojúhelník CFS je rovnoramenný: 1 bod.

B2. Důkaz rovnosti $|DF| = 2\,|SF|$: 1 bod.

B3. Myšlenka využít podobnosti trojúhelníků DFS a DBC k porovnání délek jejich stran: 1 bod.

B4. Dokreslení aspoň jednoho z bodů M, G, H, J: 1 bod.

Za část a) udělte max(A1, A2, A3) bodů, za část b) pak max(B1 + B2, B3, B4) bodů. Absenci zmínky o poloze bodu E na polopřímce opačné k polopřímce CA tolerujte.

3. *Pro nenulová reálná čísla a, b, c platí*

$$a^2(b+c) = b^2(c+a) = c^2(a+b).$$

Určete všechny možné hodnoty výrazu

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

(Jaromír Šimša)

Řešení. Ukážeme, že čísla 1 a 3 jsou jediné možné hodnoty daného výrazu. Zdůrazněme, že díky nenulovosti čísel a, b, c platí $a^2+b^2+c^2>0$, takže daný zlomek má smysl a naše výpočty jeho hodnot budou korektní.

Upravujme nejprve první ze zadaných rovností:

$$\begin{aligned}
a^2(b+c) &= b^2(c+a),\\
a^2b+a^2c &= b^2c+b^2a,\\
a^2b-b^2a &= b^2c-a^2c,\\
ab(a-b) &= c(b-a)(b+a),\\
ab(a-b) &= (b-a)(cb+ca),\\
(a-b)(ab+bc+ca) &= 0.
\end{aligned}$$

Analogickou úpravou druhé rovnosti dostaneme

$$(b-c)(ab+bc+ca)=0.$$

Vidíme, že pokud $ab+bc+ca\neq 0$, pak platí $a-b=0$ i $b-c=0$, což znamená $a=b=c$. Je tedy nutně $ab+bc+ca=0$ nebo $a=b=c$. Podívejme se na hodnotu daného výrazu v každém z obou případů.

V případě $ab+bc+ca=0$ platí

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} = \frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} = 1,$$

zatímco v případě $a=b=c$ vychází

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{(3a)^2}{a^2+a^2+a^2} = \frac{9a^2}{3a^2} = 3.$$

Oba případy jsou možné, například první nastane pro $(a,b,c)=(3,6,-2)$ a druhý pro $(a,b,c)=(1,1,1)$.* (Ověření rovností ze zadání je pro trojici $(3,6,-2)$ snadné, pro trojici $(1,1,1)$ je triviální.)

* První uvedený příklad má jednodušší alternativu $(a,b,c)=(2,2,-1)$, kterou lze snadno najít, když v rovnosti $ab+bc+ca=0$ položíme $b=a$. Dostaneme tak rovnost $a(a+2c)=0$, takže stačí vzít $b=a=-2c$, kde $c\neq 0$.

Jiné řešení. Kratším postupem odvodíme podmínku, že platí $ab + bc + ca = 0$ nebo $a = b = c$. (Pak už je možné řešení dokončit jako původně.)

Odečteme-li součin $(b + c)(c + a)(a + b)$ od každého ze tří výrazů v rovnostech

$$a^2(b + c) = b^2(c + a) = c^2(a + b),$$

dostaneme po vytknutí společných činitelů rovnosti

$$(b + c)\big[a^2 - (a + b)(c + a)\big] = (c + a)\big[b^2 - (a + b)(b + c)\big] = (a + b)\big[c^2 - (b + c)(c + a)\big].$$

Výrazy v hranatých závorkách se rovnají témuž výrazu $-(ab + bc + ca)$, takže platí

$$-(b + c)(ab + bc + ca) = -(c + a)(ab + bc + ca) = -(a + b)(ab + bc + ca).$$

Odtud v případě $ab + bc + ca \neq 0$ vychází $b + c = c + a = a + b$, a tedy $a = b = c$, jak jsme slíbili odvodit.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, tolerujte přitom absenci úvodní zmínky o tom, že zadaný zlomek má smysl. V případě neúplných postupů oceňte dílčí kroky následovně:

A1. Odvození rozkladu $(a - b)(ab + bc + ca) = 0$ nebo rozkladu analogického: 2 body.
A2. Zdůvodnění, že platí $a = b = c$ nebo $ab + bc + ca = 0$: 3 body.
A3. Určení hodnoty výrazu v případě $ab + bc + ca = 0$: 1 bod.
A4. Uvedení příkladu nenulových čísel a, b, c splňujících kromě rovností ze zadání i rovnost $ab + bc + ca = 0$: 1 bod.
A5. Určení hodnoty výrazu v případě $a = b = c$: 1 bod.

Celkem pak udělte $\max(\text{A1}, \text{A2}) + \text{A3} + \text{A4} + \text{A5}$ bodů.

Za jakékoli úpravy zadaných rovností, které nevedou k závěru z A1 ani A2, žádné body neudělujte. Pokud by řešitel podle dosavadních pokynů neměl získat žádný bod, udělte 1 bod za uvedení hypotézy, že jediné možné hodnoty daného zlomku jsou 1 a 3, jsou-li obě doloženy příkladem trojice (a, b, c) nenulových čísel, která splňuje rovnosti ze zadání.