Úlohy domácího kola kategorie B

1. *Kolik neprázdných podmnožin množiny* $\{0, 1, \ldots, 9\}$ *má součet prvků dělitelný třemi?*
(Eliška Macáková)

Řešení. Vyjdeme z toho, že při dělení třemi je zbytek součtu několika celých čísel stejný jako zbytek čísla, které dostaneme sečtením zbytků jednotlivých sčítanců.* Proto 10 zadaných čísel rozdělíme podle jejich zbytků (při dělení třemi – to dále už nebudeme psát) do tří množin

$$A_0 = \{0, 3, 6, 9\}, \quad A_1 = \{1, 4, 7\}, \quad A_2 = \{2, 5, 8\}.$$

Sčítanci z A_0 nijak neovlivňují zbytky zkoumaných součtů. Každý z těchto výsledných zbytků je plně určen dvěma počty: počtem sčítanců z A_1, který označíme x, a počtem sčítanců z A_2, který označíme y. Zřejmě $x, y \in \{0, 1, 2, 3\}$, tudíž probráním všech možných dvojic (x, y) můžeme otestovat, pro které z nich je součet x čísel z A_1 a y čísel z A_2 dělitelný třemi.**

Ve dvou skupinách nyní popíšeme (už bez vysvětlení) všechny typy vyhovujících výběrů čísel z obou množin A_1, A_2 a uvedeme jejich počty.

- V případě, že z A_1 nevybereme žádné číslo, z A_2 musíme vybrat 0 nebo 3 čísla. Stejný závěr o výběru z A_2 platí i v případě, kdy z A_1 vybereme 3 čísla. V obou případech dohromady tak máme pro výběr čísel z $A_1 \cup A_2$ čtyři možnosti (včetně jednoho „prázdného“ výběru): $\{\,\}$, $\{2, 5, 8\}$, $\{1, 4, 7\}$, $\{1, 4, 7, 2, 5, 8\}$.***
- Zbývají případy, kdy z A_1 vybereme 1 nebo 2 čísla. Pak stejný počet čísel musíme vybrat i z A_2. Protože každá tříprvková množina má 3 jednoprvkové a 3 dvouprvkové podmnožiny, máme tak dohromady dalších $3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 18$ možností výběrů čísel z $A_1 \cup A_2$ (nebudeme je zde samozřejmě vypisovat).

Existuje tedy celkem $4 + 18 = 22$ vyhovujících výběrů čísel z $A_1 \cup A_2$. Každý z nich lze doplnit o některá čísla z 4prvkové množiny A_0 právě $2^4 = 16$ způsoby (viz úlohu N1), neboť přitom musíme počítat i s „prázdným“ doplněním. Počet všech vyhovujících výběrů z $A_0 \cup A_1 \cup A_2$ je tedy roven $22 \cdot 16 = 352$, kde je ovšem započítán i „prázdný“ výběr. Proto je hledaný počet 351.

Závěr. Požadovanou vlastnost má 351 neprázdných podmnožin.

Jiné řešení. Budeme řešit obecnější úlohu: Pro každé celé $k \geqq 0$ najít počet $p(k)$ těch ne nutně neprázdných podmnožin množiny $\{0, 1, \ldots, 3k\}$, které mají součet prvků dělitelný třemi.† Odpověď na otázku z původní úlohy pak bude $p(3) - 1$.

* Tato zřejmá poučka platí při dělení jakýmkoli přirozeným číslem, nejen číslem 3.

** Rychlejší postup lze založit na tom, že zmíněný součet je dělitelný třemi, právě když je dělitelný třemi součet $x + 2y$, který lze výhodně zaměnit číslem o $3y$ menším, tedy rozdílem $x - y$. Pro čísla $x, y \in \{0, 1, 2, 3\}$ to znamená, že buď $x = y$, nebo $|x - y| = 3$.

*** Pro prázdnou množinu jsme dali přednost druhému ze dvou běžných označení $\emptyset$ a $\{\,\}$.

† Za součet prvků prázdné množiny považujeme číslo 0.

V případě $k = 0$ je daná množina $\{0\}$, takže zřejmě platí $p(0) = 2$ (vyhovují obě podmnožiny $\{\,\}$ a $\{0\}$).

Dále odvodíme vzorec, podle kterého lze hodnotu $p(k+1)$ vypočítat z hodnot k a $p(k)$, a to pro každé celé $k \geqq 0$.*

Při daném $k \geqq 0$ můžeme každou podmnožinu množiny $\{0, 1, \ldots, 3k+3\}$ sestrojit tak, že nejdříve vybereme podmnožinu množiny $\{0, 1, \ldots, 3k\}$ a tu pak sjednotíme s podmnožinou množiny $\{3k+1, 3k+2, 3k+3\}$. Posuďme všechny možnosti, kdy takto vznikne množina se součtem prvků, který je dělitelný třemi.

- Vybereme-li podmnožinu M množiny $\{0, 1, \ldots, 3k\}$ se součtem prvků dělitelným třemi, musíme ji poté sjednotit s jednou ze čtyř množin
$$\{\,\}, \quad \{3k+3\}, \quad \{3k+1, 3k+2\}, \quad \{3k+1, 3k+2, 3k+3\}.$$
Jelikož takových podmnožin M je právě $p(k)$, dostaneme z nich prvních $4p(k)$ podmnožin, které patří do hledaného počtu $p(k+1)$.
- Podmnožin množiny $\{0, 1, \ldots, 3k\}$, které jsme v předchozím odstavci neuvažovali, je právě $2^{3k+1} - p(k)$. Libovolná z nich má součet prvků, který při dělení třemi dává buď zbytek 1, nebo zbytek 2. V případě zbytku 1 pak musíme takovou podmnožinu sjednotit s jednou ze dvou množin
$$\{3k+2\}, \{3k+2, 3k+3\},$$
v případě zbytku 2 s jednou ze dvou množin
$$\{3k+1\}, \{3k+1, 3k+3\}.$$
Bez ohledu na to, kolik je prvních případů a kolik je těch druhých,** je jasné, že dohromady dostaneme dalších $2\bigl(2^{3k+1} - p(k)\bigr)$ podmnožin, které patří do hledaného počtu $p(k+1)$.

Sečtením obou dílčích počtů už získáme slíbený vzorec:
$$p(k+1) = 4p(k) + 2\bigl(2^{3k+1} - p(k)\bigr) = 2\bigl(2^{3k+1} + p(k)\bigr).$$
Jeho opakovaným užitím ze známé hodnoty $p(0) = 2$ postupně určíme $p(1) = 8$, $p(2) = 48$, $p(3) = 352, \ldots$ (další hodnoty $p(k)$ už k řešení původní úlohy nepotřebujeme).

Poznámka 1. Užitím principu matematické indukce lze snadno ověřit, že hodnota $p(k)$ z právě podaného řešení je určena explicitním vzorcem
$$p(k) = \frac{\bigl(2^{2k} + 2\bigr) \cdot 2^{k+1}}{3}.$$
V důsledku toho platí nerovnost $p(k) > \frac{1}{3} \cdot 2^{3k+1}$, kterou lze zajímavě interpretovat: Více než třetina ze všech podmnožin zadané $(3k+1)$-prvkové množiny $\{0, 1, \ldots, 3k\}$ má součet prvků dělitelný třemi.

Dodejme, že explicitní vzorec pro $p(k)$ lze také odvodit přímo bez užití rekurentní metody, a to pozoruhodným postupem, který vyložíme v následujícím řešení. Překvapivě při něm využijeme poznatky o dvojkové soustavě při zapisování přirozených čísel.***

* V takové situaci říkáme, že hodnoty $p(0), p(1), p(2), \ldots$ jsou určeny *rekurentně*.

** Počty obou případů jsou ve skutečnosti stejné. Všechny podmnožiny M_1 se „součtovým“ zbytkem 1 lze totiž spárovat se všemi podmnožinami M_2 se „součtovým“ zbytkem 2 následovně: V libovolném páru (M_1, M_2) jednu z množin dostaneme ze druhé množiny tak, že v ní každé zastoupené číslo c zaměníme číslem $3k - c$ (promyslete).

*** O takovém zapisování čísel se lze dočíst v kapitole 4 brožurky Antonína Vrby *O dělitelnosti čísel celých*

JINÉ ŘEŠENÍ. Znovu se budeme věnovat zobecnění soutěžní úlohy z předchozího řešení: Najít pro každé celé $k \geqq 0$ počet $p(k)$ těch ne nutně neprázdných podmnožin množiny $\{0, 1, \ldots, 3k\}$, které mají součet prvků dělitelný třemi.

Úvodní část bude stejná jako v prvním řešení. Zadaných $3k+1$ čísel rozdělíme podle jejich zbytků (při dělení třemi jakož i všude dále) do tří množin

$$A_0 = \{0, 3, \ldots 3k\}, \quad A_1 = \{1, 4, \ldots, 3k-2\}, \quad A_2 = \{2, 5, \ldots, 3k-1\}$$

a každou vyhovující podmnožinu budeme konstruovat ve tvaru $M_0 \cup M$, kde $M_0 \subseteq A_0$ a $M \subseteq A_1 \cup A_2$. Jelikož čísla z M_0 jsou dělitelná třemi, můžeme za M_0 vybrat kteroukoli z 2^{k+1} podmnožin $(k+1)$-prvkové množiny A_0. Proto budeme hledat hodnotu $p(k)$ ve tvaru

$$p(k) = 2^{k+1} \cdot q(k), \tag{1}$$

kde $q(k)$ je počet těch podmnožin M množiny $A_1 \cup A_2$, které mají součet prvků dělitelný třemi.

Jak víme z prvního řešení, hodnota $p(k)$ je plně určena tím, že množina A_1 je složena z k různých čísel se zbytkem 1 a množina A_2 z k různých čísel se zbytkem 2. Vezmeme proto jiné dvě množiny těchto vlastností, totiž

$$A_1' = \{2^0, 2^2, \ldots, 2^{2k-2}\} \quad \text{a} \quad A_2' = \{2^1, 2^3, \ldots, 2^{2k-1}\}$$

(využili jsme toho, že 1 je zbytek čísla 2^{2j} a 2 je zbytek čísla 2^{2j+1} pro každé celé $j \geqq 0$) a hledejme hodnotu $q(k)$ jako počet těch podmnožin v $A_1' \cup A_2'$, které mají součet prvků dělitelný třemi. Součet prvků *jakékoli* množiny $M \subseteq A_1' \cup A_2'$ je číslo z množiny $B = \{0, 1, 2, \ldots, 2^{2k}-1\}$, neboť $2^{2k}-1$ je součet *všech* čísel z množiny $A_1' \cup A_2'$.* Naopak, z jednoznačnosti zápisu čísel ve dvojkové soustavě plyne, že pro každé $s \in B$ existuje právě jedna množina $M \subseteq A_1' \cup A_2'$ se součtem prvků rovným číslu s. Díky této bijekci** mezi množinou B a množinou všech podmnožin M množiny $A_1' \cup A_2'$ docházíme k závěru, že hledaný počet $q(k)$ je roven počtu těch čísel z B, která jsou dělitelná třemi. Protože nejmenší číslo 0 i největší číslo $2^{2k}-1$ z množiny B jsou dělitelná třemi, je počet násobků čísla 3 v množině B roven $1 + \left(2^{2k}-1\right)/3$ neboli $\left(2^{2k}+2\right)/3$. Po dosazení této hodnoty za $q(k)$ do vztahu (1) už získáme výsledný vzorec

$$p(k) = 2^{k+1} \cdot \frac{2^{2k}+2}{3} = \frac{\left(2^{2k}+2\right) \cdot 2^{k+1}}{3}$$

který jsme dříve uvedli v poznámce 1 bez důkazu.

POZNÁMKA 2. Podobně jako v předchozích dvou řešeních lze také dokázat následující tvrzení.

Pro každé celé $n \geqq 0$ označme $P(n)$ počet těch ne nutně neprázdných podmnožin množiny $\{0, 1, \ldots, n\}$, které mají součet prvků dělitelný třemi. Pak $P(1) = 2$, $P(2) = 4$ a pro každé celé číslo $k \geqq 0$ platí

$$P(3k+4) = 2 \cdot \left(2^{3k+2} + P(3k+1)\right), \quad \text{explicitně} \quad P(3k+1) = \frac{\left(2^{2k+1}+1\right) \cdot 2^{k+1}}{3},$$

a

$$P(3k+5) = 2 \cdot \left(2^{3k+3} + P(3k+2)\right), \quad \text{explicitně} \quad P(3k+2) = \frac{\left(2^{2k+1}+1\right) \cdot 2^{k+2}}{3}.$$

(Hodnoty $P(3k)$ jsme posuzovali dříve pod označením $p(k)$.)

* Číslo $2^{2k}-1$ je totiž ve dvojkové soustavě zapsáno $2k$ jedničkami.

** Tímto termínem se označují zobrazení, která jsou vzájemně jednoznačná.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro každé přirozené číslo n dokažte: Počet všech podmnožin n-prvkové množiny je roven 2^n. [Představme si, že libovolnou podmnožinu postupně sestrojujeme: Pro každý prvek se rozhodujeme, zda ho vybereme či nikoli. Jelikož těchto výběrů je n a jsou navzájem nezávislé, je různých výsledků konstrukce právě 2^n.]

N2. Kolik neprázdných podmnožin množiny $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ má sudý součet prvků? [31. V dané množině jsou tři sudá a tři lichá čísla. Uvědomme si, že součet prvků její podmnožiny je sudý, právě když je v ní sudý počet lichých čísel – tedy buď žádné liché číslo (1 možnost), nebo 2 lichá čísla (ta lze vybrat 3 způsoby). Počet všech vyhovujících výběrů lichých čísel je tak roven 4. Každý z nich pak lze doplnit o některá (případně i žádné) ze tří sudých čísel právě $2^3 = 8$ způsoby. Od výsledku $4\cdot 8 = 32$ je třeba odečíst 1, neboť jsme započítali i podmnožinu složenou z 0 sudých a 0 lichých čísel, tedy prázdnou podmnožinu.]

N3. Kolika způsoby lze z množiny $\{1, 2, \ldots, 9\}$ vybrat dvě čísla se součtem dělitelným třemi? [12 způsobů. Podle zbytků při dělení třemi rozdělíme 9 zadaných čísel do tří množin $A_0 = \{1, 4, 7\}$, $A_1 = \{2, 5, 8\}$ a $A_2 = \{3, 6, 9\}$. Dvě z těchto čísel mají součet dělitelný třemi, právě když nastane jeden ze dvou případů: buď jedno číslo je z A_1 a druhé z A_2, nebo jsou obě čísla z A_0. Pro výběr dvou vyhovujících čísel máme v prvním případě $3 \cdot 3 = 9$ možností, v druhém případě 3 možnosti.]

D1. Označme M počet všech možných vyplnění tabulky 3×3 navzájem různými přirozenými čísly od 1 do 9. Dále označme L počet těch vyplnění, kde jsou navíc součty všech čísel v každém řádku i sloupci lichá čísla. Určete poměr $L : M$. [72–B–I–2]

D2. Označme M počet všech možných vyplnění tabulky 3×3 navzájem různými přirozenými čísly od 1 do 9. Dále označme D počet těch vyplnění, kde je navíc *součin* čísel v některém řádku nebo sloupci násobkem deseti. Určete poměr $D : M$. [72–B–S–1]

D3. Kolik 33místných čísel dělitelných 3 neobsahuje ve svém zápisu číslici 3? Výsledek zapište ve tvaru součinu mocnin prvočísel. [72–B–II–4]

D4. Určete počet neprázdných podmnožin množiny $\{0, 1, \ldots, 2n-1\}$ se sudým součtem prvků, kde n je dané přirozené číslo. (Zobecnění úlohy N2.) [$2^{2n-1} - 1$. V dané množině je n sudých a a n lichých čísel. Hledáme počet podmnožin se sudým počtem lichých čísel. Ukážeme nejprve, že počet způsobů, jakými lze z n lichých čísel vybrat sudý počet zástupců, je roven 2^{n-1}. K tomu stačí dokázat, že mezi všemi 2^n podmnožinami dané n-prvkové množiny je těch se sudým počtem prvků stejně jako těch s lichým počtem prvků, neboť oba počty se pak rovnají číslu $2^n : 2 = 2^{n-1}$. K důkazu zvolíme pevně jeden prvek a z dané n-prvkové množiny a všechny její podmnožiny rozdělíme na dvě skupiny podle toho, zda prvek a obsahují či nikoliv. Zástupce těchto dvou skupin lze úplně spárovat: každou množinu M bez prvku a dáme do páru s množinou $M \cup \{a\}$. Protože v každém páru je zřejmě jedna množina se sudým, a jedna s lichým počtem prvků, je důkaz hotov. K dokončení řešení uvážíme, že každý z 2^{n-1} vyhovujících výběrů lichých čísel lze doplnit o některá (případně žádné) z n sudých čísel právě 2^n způsoby. Od výsledku $2^{n-1} \cdot 2^n$ je třeba odečíst 1, neboť jsme započítali i podmnožinu složenou z 0 sudých a 0 lichých čísel, tedy prázdnou podmnožinu.]

D5. Řešte toto zobecnění soutěžní úlohy: Pro každé celé k označme $p(k)$ počet těch podmnožin množiny $\{0, 1, \ldots, 3k\}$, které mají součet prvků dělitelný třemi (započítáme mezi ně i prázdnou množinu). Dokažte vzorec $p(k) = \frac{1}{3}\bigl(2^{2k} + 2\bigr) \cdot 2^{k+1}$. *Návod*: Odvoďte nejprve, že pro každé k platí $p(k + 1) = 2\bigl(2^{3k+1} + p(k)\bigr)$, a pak využijte matematickou indukci. [Úplné řešení najdete v celém dokumentu k domácímu kolu, až bude po jeho skončení zveřejněn na internetových stránkách MO.]

Doplňující literatura:

K připomenutí pravidel o dělitelnosti doporučujeme brožurku Antonína Vrby *O dělitelnosti čísel celých* edice *Škola mladých matematiků*. Práci se zbytky při dělení v oboru celých celých usnadňují zápisy, které mají stejný název jako další brožurka Aloise Apfelbecka *Kongruence*. Najdete v ní nejen jejich zavedení, ale i zajímavé příklady uplatnění.

Pravidla k určování různých „velkých" počtů výběrů možností nebo počtů určitých typů skupin prvků najdete v brožurce Antonína Vrby *Kombinatorika*. Konečně v brožurce Rudolfa Výborného *Matematická indukce* najdete úvodní poučení o tomto významném matematickém principu a následné rozmanité příklady jeho využití.

2. *Pro reálná čísla a, b, c platí*

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}.$$

Určete všechny možné hodnoty výrazu

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3}.$$

(Michal Rolínek)

Řešení. Ze zadání plyne, že čísla a, b, c splňují podmínky

$$b+c \neq 0, \quad c+a \neq 0, \quad a+b \neq 0. \tag{P}$$

Za předpokladů (P) ekvivalentně upravíme první ze zadaných rovností:

$$\begin{gathered} \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a}, \\ a(c+a) = b(b+c), \\ ac+a^2 = b^2+bc, \\ (a-b)(a+b)+c(a-b) = 0, \\ (a-b)(a+b+c) = 0. \end{gathered}$$

Analogickými úpravami druhé rovnosti a také rovnosti třetího zlomku s prvním zlomkem dostaneme

$$(b-c)(a+b+c) = 0 \qquad \text{a} \qquad (c-a)(a+b+c) = 0.$$

Vidíme, že za předpokladů (P) reálná čísla a, b, c splňují zadání, právě když platí $a+b+c=0$ nebo $a=b=c$.

V případě, kdy $a+b+c=0$, pro zadaný výraz máme

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3} = \frac{a^3+b^3+c^3}{(-a)^3+(-b)^3+(-c)^3} = -1,$$

pokud ovšem platí $a^3+b^3+c^3 \neq 0$, jinak výraz nemá smysl.

Ve druhém případě, kdy $a=b=c$, máme

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3} = \frac{a^3+a^3+a^3}{(2a)^3+(2a)^3+(2a)^3} = \frac{1}{8},$$

ovšem tentokrát za podmínky, že $a^3 \neq 0$.

Zbývá ukázat, že každá z obou nalezených hodnot je dosažitelná.

Podmínky (P) a rovnost $a+b+c=0$ jsou splněny například pro trojici $(a,b,c) = (1,1,-2)$, pro kterou má výraz $a^3+b^3+c^3$ (skutečně nenulovou) hodnotu 6.

Podmínky (P) a rovnost $a=b=c$ jsou splněny například pro trojici $(a,b,c) = (1,1,1)$, pro kterou má výraz a^3 (skutečně nenulovou) hodnotu 1.

Závěr. Zadaný výraz má jediné dvě možné hodnoty: -1 a $1/8$.

Komentář. Bez ověření podmínky $a^3+b^3+c^3 \neq 0$ pro vybranou trojici $(1,1,-2)$ by podané řešení nebylo úplné. Sice pracnější, ale ve výsledku zajímavější je ukázat, že za podmínek (P) *nikdy* neplatí obě rovnosti $a+b+c=0$ a $a^3+b^3+c^3=0$. Pokud totiž platí první z nich, můžeme do druhé rovnosti dosadit $c=-a-b$ a dále její levou stranu upravit:

$$a^3+b^3+c^3 = a^3+b^3+(-a-b)^3 = -3a^2b-3ab^2 = -3ab(a+b) = -3(b+c)(c+a)(a+b),$$

kde jsme v posledním kroku zaměnili činitele a, b za $-b-c$, resp. $-c-a$. Zbývá dodat, že díky podmínkám (P) není součin $(b+c)(c+a)(a+b)$ roven nule.

Jiné řešení. Označme k společnou hodnotu zadaných tří zlomků. Pak zřejmě platí rovnosti

$$a = k(b+c), \quad b = k(c+a), \quad c = k(a+b). \tag{1}$$

Jakmile určíme možné hodnoty k, budeme s řešením hotovi. Pokud totiž má zadaný výraz smysl, je jeho hodnota rovna k^3, a to díky rovnostem (1) umocněným na třetí:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3} = \frac{k^3(b+c)^3+k^3(c+a)^3+k^3(a+b)^3}{(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3} = k^3.$$

K určení možných hodnot k rovnosti (1) sečteme. Dostaneme

$$(a+b+c) = 2k(a+b+c), \quad \text{odkud} \quad (a+b+c)(1-2k) = 0.$$

Platí tedy $a+b+c=0$ nebo $1-2k=0$. První rovnost znamená $k=-1$, druhá $k=1/2$. Že jsou obě tyto hodnoty k dosažitelné, ukazují stejné příklady trojic (a,b,c) jako v prvním řešení. Protože pro ně má zadaný výraz smysl, jediné jeho možné hodnoty jsou $(-1)^3=-1$ a $(1/2)^3=1/8$.

Poznámka. Ukažme, že k určení možných hodnot k můžeme se soustavou rovností (1) naložit i jinak. Odečtením druhé rovnosti od první dostaneme $a-b=k(b-a)$ čili $(a-b)(k+1)=0$. Analogicky získáme $(b-c)(k+1)=0$. Platí tedy $k=-1$ nebo $a-b=b-c=0$. Poslední ovšem znamená $a=b=c$, čemuž odpovídá $k=1/2$.

Jiné řešení. Upravíme zadané rovnosti tří zlomků, a to tak, že ke každému z nich přičteme 1. Dostaneme

$$\frac{a+b+c}{b+c} = \frac{a+b+c}{c+a} = \frac{a+b+c}{a+b}.$$

Platí tedy $a+b+c=0$ nebo

$$\frac{1}{b+c} = \frac{1}{c+a} = \frac{1}{a+b}, \quad \text{odkud} \quad b+c=c+a=a+b.$$

Z posledních dvou rovností ovšem plyne $a=b=c$. Dále už můžeme pokračovat jako v prvním řešení.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro reálná platí $a/(b+1) = b/(a+1)$. Dokažte, že čísla a, b jsou stejná nebo se jejich součet rovná -1. [Zadanou rovnost upravíme na $a^2 + a = b^2 + b$, dále na $a^2 - b^2 = b - a$ a konečně užitím rozkladu $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ na $(a - b)(a + b + 1) = 0$. Odtud už plyne tvrzení.]

N2. Pro reálná čísla a, b, c platí $a/b = b/c = c/a$. Určete všechny možné hodnoty součtu $a/(b+c)+b/(c+a)+c/(a+b)$. [3/2. Čísla a, b, c jsou nenulová díky existenci podílů a/b, b/c, c/a, jejichž společnou hodnotu označíme k. Vynásobením rovností $k = a/b$, $k = b/c$, $k = c/a$ dostaneme $k^3 = 1$, odkud plyne $k = 1$ (je možné odvolat se na graf funkce $y = x^3$, nebo využít rozklad $k^3 - 1 = (k - 1)(k^2 + k + 1)$, kde $k^2 + k + 1 > 0$, ať je reálné číslo k jakékoli). Rovnost $k = 1$ podle určení čísla k ovšem znamená, že $a = b = c \neq 0$, tudíž podíly $a/(b + c)$, $b/(c + a)$, $c/(a + b)$ mají smysl a stejnou hodnotu $1/2$.]

D1. Určete, jakých hodnot může nabývat výraz

$$\frac{a+bc}{a+b} + \frac{b+ca}{b+c} + \frac{c+ab}{c+a},$$

jsou-li a, b, c kladná reálná čísla se součtem 1. [70–C–I–4]

D2. Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla, pro něž platí $ab+bc+ca = 1$. Určete, jakých hodnot nabývá výraz

$$\frac{a(b^2+1)}{a+b} + \frac{b(c^2+1)}{b+c} + \frac{c(a^2+1)}{c+a}.$$

[70–C–S–3]

D3. Nechť x, y, z jsou kladná reálná čísla, jejichž součin je roven 1. Dokažte, že platí rovnost

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = 1.$$

[První zlomek rozšiřte z, druhý xz a třikrát využijte podmínku $xyz = 1$.]

D4. Pro reálná čísla x, y, z platí

$$|x+y| = 1-z, \quad |y+z| = 1-x, \quad |z+x| = 1-y.$$

Zjistěte, jakých všech hodnot může nabývat součet $x+y+z$. Pro každý vyhovující součet uveďte příklad odpovídajících čísel x, y, z. [70–B–S–1]

D5. Pro reálná čísla a, b, c jsou oba součty $a+b+c$ a $a^3+b^3+c^3$ rovny nule. Najděte všechny možné hodnoty součinu abc. [0. Zapišme, že nula se rovná součtu $a^3+b^3+c^3$, kam rovnou dosadíme $c = -a - b$:

$$0 = a^3 + b^3 + (-a-b)^3 = a^3 + b^3 - \left(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\right) = -3ab(a+b).$$

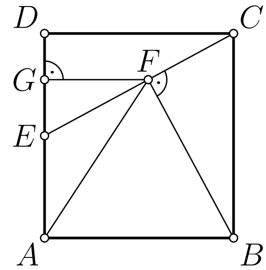
Vidíme, že nulové je alespoň jedno z čísel a, b, $a + b$, přitom třetí z nich je rovno $-c$. Odtud už plyne $abc = 0$.]

D6. Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\frac{1}{x+y} + z = 1, \quad \frac{1}{y+z} + x = 1, \quad \frac{1}{z+x} + y = 1.$$

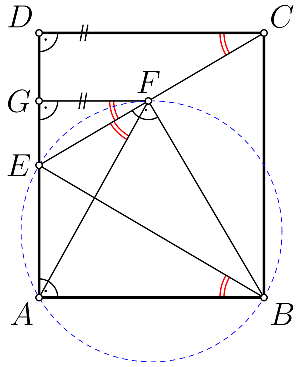
[69–A–II–1]

D7. Pro nenulová reálná čísla a, b, c platí $a^2 - b^2 = bc$ a $b^2 - c^2 = ca$. Ukažte, že pak také $a^2 - c^2 = ab$. [Sečtením daných rovností obdržíme $a^2 - c^2 = bc + ca$, takže stačí ověřit rovnost $bc + ca = ab$ neboli $a(b - c) = bc$. K tomu dané rovnosti upravíme do tvaru $a^2 = b(b + c)$, $(b - c)(b + c) = ca$ a pak mezi sebou vynásobíme, čímž dostaneme $a^2(b - c)(b + c) = abc(b + c)$. Odtud už po vydělení obou stran součinem $a(b + c)$ získáme ověřovanou rovnost. Zmíněné vydělení je korektní, neboť podle zadání platí $a \neq 0$ a případná rovnost $b + c = 0$ by spolu s $b^2 - c^2 = ca$ vedla k rovnosti $0 = ca$, která je ve sporu s nenulovostí čísel a, c.]



3. *Nechť E je střed strany AD pravoúhelníku $ABCD$. Předpokládejme, že pata F kolmice z vrcholu B k přímce CE leží uvnitř úsečky CE a označme G patu kolmice z bodu F ke straně AD. Dokažte, že přímka CE půlí úhel AFG.* (Jaroslav Švrček)

Řešení. Uvedeme tři pozorování, ze kterých vyplyne shodnost čtyř úhlů vyznačených na obrázku dvěma obloučky. Díky dvěma z nich, totiž úhlům AFE a GFE, přímka CE skutečně půlí úhel AFG.



- Protože oba úhly BAE a BFE jsou pravé (a jejich vrcholy A, resp. F leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou BE), podle Thaletovy věty je čtyřúhelník $ABFE$ tětivový. V kružnici jemu opsané tak (podle věty o obvodových úhlech) platí $|\sphericalangle AFE| = |\sphericalangle ABE|$.
- Trojúhelníky ABE a DCE jsou shodné podle věty *sus*, neboť $|AB| = |DC|$, $|AE| = |DE|$ a oba úhly BAE a CDE jsou pravé. Proto platí $|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle DCE|$.*
- Úsečky CD a FG jsou kolmé ke straně AD, a tedy navzájem rovnoběžné. Podle věty o souhlasných úhlech tak platí $|\sphericalangle DCE| = |\sphericalangle GFE|$.

  Dohromady už dostáváme

$$|\sphericalangle AFE| = |\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle DCE| = |\sphericalangle GFE|,$$

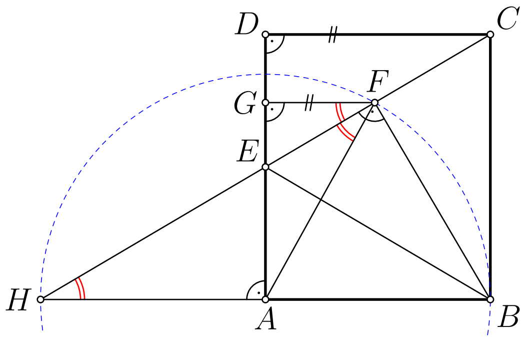
jak jsme slíbili ukázat.

Jiné řešení. Tentokrát potřebnou shodnost úhlů AFE a GFE dokážeme užitím pomocného bodu H, který zavedeme jako průsečík přímek CE a AB.

Trojúhelníky AEH a DEC jsou shodné podle věty *usu*, neboť $|AE| = |DE|$, u vrcholů A, D mají pravé úhly a u vrcholu E shodné vrcholové úhly. Díky tomu platí $|AH| = |DC|$, tudíž i $|AH| = |AB|$.** Bod A je tak středem úsečky HB, která je přeponou pravoúhlého trojúhelníku HBF. Střed kružnice jemu opsané je podle Thaletovy věty tedy právě bod A. Platí proto $|AF| = |AH|$, tudíž v trojúhelníku AFH jsou shodné vnitřní úhly AHF a AFH, což je úhel AFE. K jeho shodnosti s úhlem GFE tak už jen zbývá dokázat shodnost úhlů AHF a GFE. To jsou však střídavé úhly mezi dvěma kolmicemi AH a FG ke straně AD, tedy mezi dvěma rovnoběžkami.

* Místo užití věty *sus* stačilo konstatovat známou souměrnost pravoúhelníku $ABCD$ podle společné osy protějších stran BC a AD (která prochází bodem E).

** Tato rovnost rovněž plyne z toho, že AE je střední příčka trojúhelníku BCH. Je totiž rovnoběžná se stranou BC a má oproti ní poloviční délku.



Návodné a doplňující úlohy:

Úvodem připomeneme, že konvexní čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový, právě když platí kterákoli z podmínek:

▷ Součet některých dvou jeho protějších vnitřních úhlů je 180°, například těch u vrcholů B a D: $|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDA| = 180°$. (Tehdy k tětivovosti jakéhokoli čtyřúhelníku $ABCD$ stačí, aby body B a D ležely uvnitř opačných polorovin s hraniční přímkou AC.)

▷ Úhly „nad" některou jeho stranou jsou shodné, například nad stranou AB jde o úhly s vrcholy C a D: $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|$. (Tehdy k tětivovosti jakéhokoli čtyřúhelníku $ABCD$ či $ABDC$ stačí, aby body C a D ležely uvnitř stejné poloroviny s hraniční přímkou AB.)

Při řešení úloh často nejprve užitím jedné z těchto podmínek tětivovost některého konvexního čtyřúhelníku dokážeme a pak vhodně využijeme platnost druhé podmínky.

N1. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí rovnosti $|\sphericalangle BAD| = 42°$, $|\sphericalangle ABC| = 79°$, $|\sphericalangle DCB| = 138°$ a $|\sphericalangle BDC| = 25°$. Určete $|\sphericalangle ACB|$. [76°. Díky součtu $42° + 138° = 180°$ je čtyřúhelník $ABCD$ tětivový, takže v něm platí $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|$ a $|\sphericalangle ADC| = 180° - |\sphericalangle ABC| = 101°$, tudíž $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ADC| - |\sphericalangle BDC| = 101° - 25° = 76°$.]

N2. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s výškami AD a BE.* Dokažte, že střed kružnice opsané trojúhelníku CDE leží na výšce trojúhelníku ABC z vrcholu C. [Označme H průsečík výšek AD a BE. Díky pravým úhlům CEH a CDH je podle Thaletovy věty čtyřúhelník $CEHD$ tětivový a střed kružnice jemu opsané je středem úsečky CH, tudíž skutečně leží na třetí výšce trojúhelníku ABC.]

N3. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s výškami AD, BE a CF. Dokažte, že tyto výšky půlí vnitřní úhly trojúhelníku DEF. [S ohledem na symetrii stačí dokázat pouze rovnost $|\sphericalangle DFC| = |\sphericalangle EFC|$. Díky pravým úhlům nad stranou AC je čtyřúhelník $AFDC$ tětivový, odkud $|\sphericalangle DFC| = |\sphericalangle DAC|$. Podobně je tětivový i čtyřúhelník $ABDE$, takže $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle DBE| = |\sphericalangle CBE|$. Konečně i čtyřúhelník $CEFB$ je tětivový, takže $|\sphericalangle CBE| = |\sphericalangle CFE|$. Dohromady už máme $|\sphericalangle DFC| = |\sphericalangle CFE|$, jak jsme slíbili dokázat. Kratší důkaz shodnosti úhlů DFC a EFC: V tětivovém čtyřúhelníku $ACDF$ jsou shodné úhly DFC a DAC, přitom druhý z nich má z $\triangle DAC$ velikost $90° - \gamma$, kde $\gamma = |\sphericalangle BCA|$. Úhel DFC tak má velikost $90° - \gamma$, která se nezmění, vyměníme-li navzájem označení vrcholů A a B. Tuto velikost proto má i úhel EFC.]

D1. Jsou dány dva tětivové čtyřúhelníky $ABXY$ a $CDYX$, přitom jejich společné vrcholy X a Y leží po řadě na úsečkách AC a BD. Dokažte, že platí $AB \parallel CD$. [Stačí dokázat shodnost střídavých úhlů BAC a DCA, tedy úhlů BAX a DCX (neboť X leží mezi A a C). Využijeme k tomu vlastností obou tětivových čtyřhelníků a toho, že úhly BYX a XYD jsou vedlejší (neboť Y leží mezi B a D): $|\sphericalangle BAX| = |\sphericalangle BYX| = 180° - |\sphericalangle XYD| = 180° - (180° - |\sphericalangle DCX|) = |\sphericalangle DCX|$.]

D2. Nechť D je vnitřní bod přepony AB pravoúhlého trojúhelníku ABC. Označme X a Y středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům ADC a CDB. Dokažte, že body C, D, X a Y leží na jedné kružnici. [Protože úhly CAD a DBC jsou ostré, středy X a Y leží

* Jako obvykle *výškou trojúhelníku* rozumíme *úsečku*, kterou popisujeme jejími krajními body.

v opačných polorovinách s hraniční přímkou DC a podle věty o obvodovém a středovém úhlu pro velikosti konvexních středových úhlů CXD a DYC platí $|\sphericalangle CXD| = 2|\sphericalangle CAD|$ a $|\sphericalangle DYC| = 2|\sphericalangle DBC|$. Sečtením obou rovností dostaneme $|\sphericalangle CXD| + |\sphericalangle DYC| = 2(|\sphericalangle CAD| + |\sphericalangle DBC|) = 2 \cdot 90° = 180°$, tudíž $CXDY$ je tětivový čtyřúhelník. Dokonce platí, že kružnice jemu opsaná má průměr XY, neboť trojúhelníky CXY a DXY jsou shodné podle věty *sss*, takže v tětivovém čtyřúhelníku $CXDY$ jsou úhly u protějších vrcholů C a D shodné, a tudíž pravé.]

D3. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Tečny v bodech A, B ke kružnici tomuto trojúhelníku opsané se protínají v bodě T. Předpokládejme, že přímka rovnoběžná se stranou AC, která prochází bodem T, protíná stranu BC v bodě D. Dokažte, že $|AD| = |CD|$. [Klíčem k řešení je odhalení tětivovosti čtyřúhelníku $ATBD$. K důkazu tohoto poznatku stačí ověřit, že oba úhly BAT a BDT mají stejnou velikost $\gamma = |\sphericalangle BCA|$ – podle zadání totiž oba body A, D leží s celou opsanou kružnicí na jednu stranu od její tečny BT. Pro první úhel úhel TAB to přímo plyne z věty o obvodovém a úsekovém úhlu, pro druhý úhel BDT je to důsledek souhlasné rovnoběžnosti úseček AC a TD. Čtyřúhelník $ATBD$ je tedy skutečně tětivový. Nyní už dokazovaná rovnost $|AD| = |CD|$ snadno vyplyne z toho, že v trojúhelníku CAD má velikosti γ nejen úhel DCA, ale také úhel CAD. Ten je totiž shodný se střídavým úhlem ADT, ten díky našemu odhalení s úhlem ABT, který je konečně podle $|TA| = |TB|$ shodný s úhlem TAB, o jehož velikosti γ už víme.]

D4. Nechť AC je průměr kružnice opsané tětivovému čtyřúhelníku $ABCD$. Předpokládejme, že na polopřímkách opačných k polopřímkám AD a DC existují po řadě body $A' \neq A$ a $C' \neq D$ takové, že platí $|AB| = |A'B|$ a $|BC| = |BC'|$. Dokažte tvrzení:

a) Body A', B, C' a D leží na téže kružnici k.

b) Je-li O střed kružnice k a O_A, O_C jsou po řadě středy kružnic opsaných trojúhelníkům $AA'B$, $CC'B$, pak platí $OO_A \perp OO_C$. [69–B–I–3]

D5. Na stranách AB a BC daného trojúhelníku ABC leží po řadě takové body D a E, že $|BD| = |DC| = |CA|$ a $|EC| = |ED|$. Dokažte, že $|AE| = |BE|$. [72–B–II–3]

D6. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C. Nechť D je libovolný vnitřní bod odvěsny AC a p kolmice z bodu D k přeponě AB. Označme $E \neq D$ bod přímky p takový, že body A, B, D, E leží na kružnici. Označme ještě F průsečík přímek p a BC. Dokažte, že $|AE| = |AF|$. [70–B–II–3]

D7. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB a bod P uvnitř jeho výšky z vrcholu C. Přímka AP protne kružnici opsanou trojúhelníku ABC v bodě Q různém od A. Rovnoběžka se základnou AB vedená bodem P protne rameno BC v bodě R. Dokažte, že polopřímka QR je osou úhlu AQB. [71–A–II–3]

Doplňující literatura:

K tématu soutěžní úlohy (úhly, které spojujeme s kružnicemi, tětivové čtyřúhelníky) doporučujeme brožurku Stanislava Horáka *Kružnice*. Najdete v ní také důkazy všech poznatků, které jsme připomněli před uvedením úlohy N1.

4. *Rozhodněte, zda existuje pětice přirozených čísel*

(i) a, a, a, a, b ($a \neq b$),

(ii) a, a, b, b, c ($a \neq b \neq c \neq a$),

v níž je každé z těchto čísel dělitelem součtu každých tří ze zbylých čtyř čísel.

(Jaroslav Zhouf)

Řešení. *Část* (i). Nejdříve určíme, které dělitelnosti mají platit.

V zadané pětici a, a, a, b, b jsou dvě různá čísla a a b. Číslo a má dělit jednak součet $a + a + a$, což platí pro každé a, jednak součet $a + a + b$, což zřejmě nastane, právě když $a \mid b$. Na dělitelnost číslem a tak máme jedinou podmínku $a \mid b$.

Číslo b má dělit jediný součet $a + a + a = 3a$, má tedy platit $b \mid 3a$.

Máme tedy rozhodnout, zda může zároveň platit $a \mid b$ a $b \mid 3a$. Odpověď je ano, jak potvrzuje příklad $a = 1$ a $b = 3$, kdy zadaná pětice je $1, 1, 1, 1, 3$.

I když to zadání úlohy nevyžaduje, ukážeme, že všechny vyhovující pětice jsou $a, a, a, a, 3a$. Skutečně, první podmínka $a \mid b$ znamená, že $b = ka$ pro vhodné přirozené číslo k. Zbylou druhou podmínku $b \mid 3a$ pak můžeme přepsat jako $ka \mid 3a$ neboli $k \mid 3$, a tak $k = 1$ nebo $k = 3$. Podle zadání však platí $a \neq b$, tedy $a \neq ka$, odkud $k \neq 1$. Jediné vyhovující k je tak 3.

Část (ii). I nyní nejdříve určíme dělitelnosti, které mají čísla z pětice a, a, b, b, c splňovat. (Zjistíme, že dělitelnosti číslem c nebude nutné posuzovat.)

Číslo a má dělit tři součty $a+b+b$, $a+b+c$, $b+b+c$. Rozdíl posledních dvou součtů je $a - b$ a jeho dělitelnost číslem a je ekvivalentní s podmínkou $a \mid b$. Je-li splněna, pak ze tří výrazů $a + 2b$, $a + b + c$, $2b + c$ je číslem a zaručeně dělitelný jen ten první, zatímco pro zbylé dva výrazy to pak platí, právě když $a \mid c$. Proto na dělitelnost číslem a máme celkem dvě podmínky

$$a \mid b \quad \text{a} \quad a \mid c. \tag{1}$$

Číslo b má dělit tři součty $a + a + b$, $a + a + c$, $a + b + c$. To nastane, právě když b je dělitelem po řadě výrazů $2a$, $2a + c$, $a + c$. Rozdíl posledních dvou součtů je a a jeho dělitelnost číslem b, tedy podmínka $b \mid a$, redukuje naše tři dělitelnosti číslem b opět na dvě:*

$$b \mid a \quad \text{a} \quad b \mid c. \tag{2}$$

Podmínky na dělitelnost třetím číslem c už není nutné rozebírat, pokud si povšimneme, že podle (1) a (2) má současně platit $a \mid b$ a $b \mid a$, což zřejmě (viz úlohu N3) znamená, že $a = b$. Podle zadání má ovšem platit $a \neq b$, tudíž žádná vyhovující pětice a, a, b, b, c neexistuje.

Poznámka. Z našeho postupu v části (ii) plyne, že pětice a, a, b, b, c neexistuje, ani když ze zadání úlohy vynecháme podmínky dělitelnosti číslem c.

Komentář. Podaná řešení obou části jsme zahájili systematickým výpisem *všech* (i těch triviálně splněných) podmínek dělitelnosti, které jsme pro každého dělitele rovnou co nejvíce zjednodušili. Úplné řešení lze ovšem zapsat stručněji. Vysvětlíme nyní jak.

* Jelikož zastoupení čísel a a b je v pětici a, a, b, b, c rovnocenné, lze podmínky (2) rovnou získat z podmínek (1) tak, že v nich čísla a a b navzájem vyměníme.

V části (i) můžeme nějaký vyhovující příklad rovnou vypsat (jako bychom ho uhodli) a pak provést zkoušku (ta by ovšem neměla chybět). Nebo se úvodem rozhodneme výhodně zvolit $a = 1$ (číslo 1 je totiž samozřejmý dělitel) a pak si povšimneme, že stačí, aby odpovídající pětice $1, 1, 1, 1, b$ splňovala jedinou podmínku $b \mid 1 + 1 + 1$.

V části (ii) se stačilo omezit na odvození podmínky $a \mid b$, dále k ní – podle symetrie zmíněné v poznámce pod čarou – připojit podmínku $b \mid a$, a dojít tak ke sporné rovnosti $a = b$. Uveďme také jednu z delších alternativ (bez odvození $a \mid b$ i $b \mid a$), kdy do výkladu zapojíme dělitelnosti číslem c: Nejprve z podmínek $a \mid a+b+b = a+2b$, $b \mid b+a+a = b+2a$ neboli $a \mid 2b$, $b \mid 2a$ odvodíme, že platí buď $a = 2b$, nebo $b = 2a$: Kdyby totiž ani jedna z těchto rovností neplatila, z $a \mid 2b$ bychom podle tvrzení z N4 měli $2a \leqq 2b$, a tedy $a < b$ (díky předpokladu $a \neq b$), zatímco z $b \mid 2a$ by podobně vyplynulo $b < a$, dohromady spor. S ohledem na symetrii se dále stačí zabývat případem $b = 2a$, kdy z podmínek $c \mid a + 2b$ a $c \mid b + 2a$ máme $c \mid (a + 2b) - (b + 2a) = b - a = a$, tj. $c \mid a$. Zároveň však z $a \mid 2b + c$ s ohledem na $b = 2a$ máme $a \mid c$. Dohromady tak (opět díky N3) docházíme ke sporné rovnosti $a = c$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro celá čísla n, a, b platí $n \mid a$ a $n \mid b$. Dokažte, že pak pro libovolná celá čísla k, l platí rovněž $n \mid ka + lb$ (speciálně například $n \mid a + b$ a $n \mid a - b$). [Podle podmínek $n \mid a$ a $n \mid b$ existují celá čísla a' a b' tak, že $a = a'n$ a $b = b'n$. Potom $ka+lb = ka'n+lb'n = (ka'+lb')n$, kde $ka' + lb'$ je celé číslo, a proto $n \mid ka + lb$.]

N2. Pro která přirozená čísla n je zaručeno, že celá čísla u, v splňující obě podmínky $n \mid u+v$ a $n \mid u - v$ jsou sama dělitelná číslem n? [Právě pro lichá n. Z $n \mid u + v$ a $n \mid u - v$ plyne, že $n \mid 2u$ a $n \mid 2v$, neboť $2u = (u + v) + (u - v)$ a $2v = (u + v) - (u - v)$. Je-li n liché, je n s číslem 2 nesoudělné, a proto z $n \mid 2u$ a $n \mid 2v$ už plyne $n \mid u$, resp. $n \mid v$. Pro sudé n uvažte protipříklad $u = v = n/2$.]

N3. Dokažte, že pokud pro přirozená čísla a a b platí $a \mid b$ a $b \mid a$, pak $a = b$. [Jelikož pro každý kladný dělitel d daného přirozeného čísla u zřejmě platí $d \leqq u$, z $a \mid b$ a $b \mid a$ plyne po řadě $a \leqq b$ a $b \leqq a$, dohromady $a = b$. Jinak můžeme zapsat rovnosti $a = kb$ a $b = la$ pro vhodná přirozená čísla k a l, odkud po vynásobení dostaneme $ab = kbla$ a dále po vydělení ab obdržíme $kl = 1$, což znamená, že nutně $k = l = 1$.]

N4. Dokažte, že pokud pro různá přirozená čísla u a v platí $u \mid v$, pak $2u \leqq v$. [Z $u \mid v$ plyne $v = ku$ pro vhodné přirozené číslo, přitom z $u \neq v$ plyne $k \neq 1$, tedy $k \geqq 2$. Proto $v = ku \geqq 2u$.]

D1. Pro přirozená čísla a, b platí $a \mid 9b$ a $b \mid 9a$. Určete všechny možné hodnoty podílu a/b. [$9, 3, 1, 1/3, 1/9$. Vztah $a \mid 9b$ znamená $9b = ka$ pro vhodné přirozené k. Proto nyní $b \mid 9a$ přepíšeme jako $9b \mid 81a$, odkud po dosazení za $9b$ dostaneme vztah $ka \mid 81a$ neboli $k \mid 81$. Číslo k je tedy jeden z dělitelů $1, 3, 9, 27, 81$ čísla 81. Protože z $9b = ka$ plyne $a/b = 9/k$, každá hodnota a/b se musí rovnat jednomu z čísel $9, 3, 1, 1/3, 1/9$. Všechny tyto hodnoty jsou dosažitelné, například dvojicemi (a, b) z množiny $\{(9, 1), (3, 1), (1, 1), (1, 3), (1, 9)\}$. Jiné řešení: Hodnota podílu a/b ani platnost podmínek $a \mid 9b$, $b \mid 9a$ se nezmění, když čísla a, b vydělíme jejich největším společným dělitelem. Proto stačí uvažovat jen dvojice nesoudělných čísel a a b. Pro ně jsou podmínky $a \mid 9b$ a $b \mid 9a$ po řadě ekvivalentní s podmínkami $a \mid 9$ a $b \mid 9$, takže stačí vypočítat hodnoty a/b pro všechny dvojice (a, b) nesoudělných dělitelů čísla 9, tedy pro dvojice z množiny $\{(9, 1), (3, 1), (1, 1), (1, 3), (1, 9)\}$.]

D2. Na školní zahradě hraje skupina žáků hru zvanou molekuly. Učitel jim nejprve uložil, aby se rozdělili do trojic. Jeden žák přebyl, a tak z další hry vypadl. Zbylí žáci se pak měli rozdělit do čtveřic. Opět jeden žák přebyl a vypadl. Poté se zbylí žáci měli rozdělit do pětic, zase jeden žák přebyl a vypadl. Učitel nyní ukládá, aby se zbylí žáci rozdělili do šestic. Dokažte, že opět jeden žák přebyde. [71–C–I–1]

D3. Určete všechny dvojice (m, n) kladných celých čísel, pro něž je číslo $4(mn+1)$ dělitelné číslem $(m+n)^2$. [60–A–II–3]

D4. Určete všechna kladná celá čísla m, n taková, že n je dělitelem $2m-1$ a současně m je dělitelem $2n-1$. [59–A–II–3]

D5. Najděte všechny trojice navzájem různých prvočísel p, q, r splňujících tři podmínky $p \mid q+r$, $q \mid r+2p$ a $r \mid p+3q$. [55–A–III–5]

Doplňující literatura:

K soutěžní úloze 4 doporučujeme brožurky Františka Veselého *O dělitelnosti čísel celých* a Aloise Apfelbecka *Kongruence* jako k soutěžní úloze 1.

5. *V pravoúhlém trojúhelníku je poměr poloměru kružnice vepsané ku poloměru kružnice opsané* 2 : 5*. Dokažte, že délka jedné z jeho stran je aritmetickým průměrem délek zbylých dvou stran.* (Mária Dományová)

Řešení. Označme a, b délky odvěsen a c délku přepony libovolného pravoúhlého trojúhelníku. Poloměr R kružnice jemu opsané je dán vzorcem $R = \frac{1}{2}c$ díky Thaletově větě, zatímco pro poloměr r kružnice vepsané je znám vzorec $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$, který dokážeme v řešení úlohy N2.

Po tomto obecném úvodu přejděme k vlastnímu řešení. Ze zadaného vztahu $r : R = 2 : 5$ po dosazení uvedených vzorců dostaneme

$$\frac{a + b - c}{c} = \frac{2}{5},$$

což ještě po rozepsání levé strany na tři zlomky upravíme do tvaru

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{7}{5}. \tag{1}$$

Rovnost $a^2 + b^2 = c^2$ z Pythagorovy věty s ohledem na (1) vydělíme c^2. Dostaneme

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1. \tag{2}$$

Nyní je výhodné zavést označení

$$x = \frac{a}{c} \quad \text{a} \quad y = \frac{b}{c} \tag{3}$$

a rovnosti (1), (2) považovat za soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} x + y &= \tfrac{7}{5}, \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

s neznámými x a y. Tu vyřešíme běžnou metodou: Vyjádření $y = \frac{7}{5} - x$ z (1) dosadíme do (2) a získáme tak pro x kvadratickou rovnici $x^2 + (\frac{7}{5} - x)^2 = 1$ s kořeny $x_1 = \frac{3}{5}$ a $x_2 = \frac{4}{5}$. Těm podle (1) odpovídají hodnoty $y_1 = \frac{4}{5}$ a $y_2 = \frac{3}{5}$. Naše soustava rovnic tak má právě dvě řešení

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \quad \text{a} \quad (x_2, y_2) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right).$$

To podle (3) znamená, že trojice stran (a, b, c) má pro každý vyhovující trojúhelník tvar $(3d, 4d, 5d)$ nebo $(4d, 3d, 5d)$, kde d značí vhodnou délku.* Jelikož délka $4d$ je aritmetickým průměrem zbylých délek $3d$ a $5d$, důkaz je hotov.

* Lze si povšimnout, že díky vzorci $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$ je délka d rovna právě poloměru r.

Poznámka. Naznačme, jak je možné po odvození vztahu $(a+b-c)/c = 2/5$ postupovat jinak. Plyne z něho vyjádření $c = 5(a+b)/7$, které dosadíme za c do rovnosti $c^2 = a^2 + b^2$ z Pythagorovy věty. Po snadných úpravách obdržíme rovnost

$$12a^2 - 25ab + 12b^2 = 0.$$

Vyřešením této kvadratické rovnice s neznámou a a parametrem b získáme kořeny $a_1 = 3b/4$ a $a_2 = 4b/3$. Dosazením do $c = 5(a+b)/7$ pak určíme $c_1 = 5b/4$ a $c_2 = 5b/3$. Délky stran našeho trojúhelníku tak tvoří jednu z trojic $(3b/4, b, 5b/4)$ nebo $(4b/3, b, 5b/3)$, ze kterých po přeznačení $b = 4d$, resp. $b = 3d$ dostaneme stejné trojice $(3d, 4d, 5d)$ a $(4d, 3d, 5d)$ jako v původním řešení.

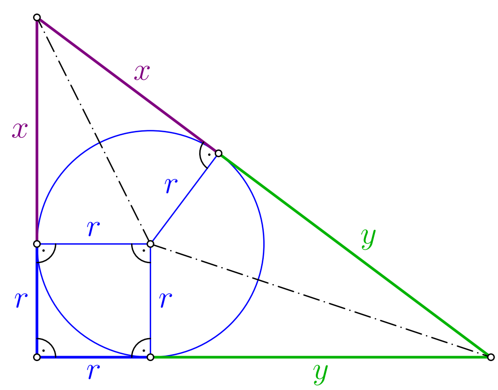
Jiné řešení. Tentokrát se vyhneme přímému užití vzorce $r = \frac{1}{2}(a+b-c)$. K potřebným geometrickým úvahám využijeme náš obrázek. Na něm je vykreslen pravoúhlý trojúhelník, kružnice jemu vepsaná s vyznačenými body dotyku a tři jim příslušné poloměry velikosti r. Ty rozdělují celý trojúhelník na čtverec o straně délky r a dva čtyřúhelníky, které jsou deltoidy díky jejich souměrnostem podle vyznačených úhlopříček ležících na osách vnitřních úhlů trojúhelníku. Jeden deltoid tak má strany délek r, r, x, x a druhý strany délek r, r, y, y. Odvěsny trojúhelníku tudíž mají délky $x+r$, $y+r$ a jeho přepona má délku $x+y$. Proto podle Pythagorovy věty platí

$$(x+r)^2 + (y+r)^2 = (x+y)^2 \tag{4}$$

a poloměr R kružnice opsané má díky Thaletově větě velikost $R = \frac{1}{2}(x+y)$. Po jejím dosazení do zadané podmínky $r : R = 2 : 5$ dostaneme $r = \frac{1}{5}(x+y)$. Odtud plyne $x + y = 5r$, a tedy $y = 5r - x$. Po dosazení za $x+y$ a y do (4) tak obdržíme

$$(x+r)^2 + ((5r-x)+r)^2 = (5r)^2, \quad \text{po úpravě} \quad x^2 - 5rx + 6r^2 = 0.$$

To je kvadratická rovnice s neznámou x a parametrem r, kterou můžeme vyřešit i pamětným rozkladem na $(x-2r)(x-3r) = 0$. Tato rovnice má tedy dva kořeny $x_1 = 2r$ a $x_2 = 3r$, kterým podle vzorce $y = 5r - x$ odpovídají hodnoty $y_1 = 3r$ a $y_2 = 2r$. Trojice $(x+r, y+r, 5r)$ délek stran našeho trojúhelníku je proto jedna z trojic $(3r, 4r, 5r)$ nebo $(4r, 3r, 5r)$, takže tvrzení ze zadání úlohy platí.



Návodné a doplňující úlohy:

N1. Zdůvodněte, že poloměr kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku je polovinou délky jeho přepony. [Podle Thaletovy věty je přepona pravoúhlého trojúhelníku průměrem kružnice jemu opsané.]

N2. Dokažte, že v pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami délek a, b a přeponou délky c platí pro poloměr r kružnice jemu vepsané vzorec $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$. [Body dotyku kružnice vepsané rozdělují strany trojúhelníku na šest úseků. Dva z nich (ty při vrcholu pravého úhlu) jsou sousedními stranami čtverce o straně délky r. Celé odvěsny tak mají délky $a = r + x$ a $b = r + y$, kde x a y jsou délky jejich úseků při vrcholech ostrých úhlů. Ty jsou (díky souměrnostem podle os těchto úhlů) shodné s dvěma úseky, na které je rozdělena přepona, která má proto délku $c = x + y$. Nyní je jasné, že zřejmou rovnost $2r = (r + x) + (r + y) - (x + y)$ můžeme přepsat jako $2r = a + b - c$. Po vydělení číslem 2 jsme s důkazem hotovi.]

N3. Pravoúhlý trojúhelník o odvěsnami délek a, b a přeponou délky c splňuje podmínku $3a + 4b = 5c$. Určete všechny možné hodnoty poměru $a : c$. [Zadanou rovnost vydělíme c a dostaneme $3a/c + 4b/c = 5$. Z Pythagorovy věty máme $a^2 + b^2 = c^2$, takže $(a/c)^2 + (b/c)^2 = 1$. To nám dává pro podíly $x = a/c$ a $y = b/c$ soustavu rovnic $3x + 4y = 5$ a $x^2 + y^2 = 1$. Dosadíme-li vyjádření $y = (5 - 3x)/4$ z první rovnice do druhé rovnice, dostaneme po vynásobení číslem 16 rovnici $16x^2+(5-3x)^2 = 16$, po úpravě $(5x-3)^2 = 0$. Odtud $x = 3/5$. Nalezená hodnota $a/c = x = 3/5$ poměru $a : c$ je možná – například $a = 3$, $b = 4$ a $c = 5$ jsou délky stran pravoúhlého trojúhelníku a platí pro ně $3a+4b = 5c$.]

D1. Pro poloměr r kružnice vepsané obecnému trojúhelníku dokažte vzorec $r = S/s$, kde S je obsah tohoto trojúhelníku a s je polovina jeho obvodu. [Označme I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC s obvykle značenými délkami stran. Obsah S celého trojúhelníku je součtem obsahů trojúhelníků BCI, CAI a ABI, které se po řadě rovnají $\frac{1}{2}ar$, $\frac{1}{2}br$ a $\frac{1}{2}cr$. Z rovnosti $S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr$ už snadnou úpravou dostaneme dokazovaný vzorec.]

D2. Odvoďte vzorec $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$ z úlohy N1 užitím výsledku úlohy D1. [Trojúhelník ze zadání úlohy N1 má obsah $S = \frac{1}{2}ab$. Podle vzorce z D1 tak s přihlédnutím k $c^2 = a^2 + b^2$ platí

$$r = \frac{S}{s} = \frac{\frac{ab}{2}}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{ab(a+b-c)}{(a+b+c)(a+b-c)} = \frac{ab(a+b-c)}{(a+b)^2-c^2} =$$
$$= \frac{ab(a+b-c)}{(a+b)^2-(a^2+b^2)} = \frac{ab(a+b-c)}{2ab} = \frac{a+b-c}{2}.]$$

D3. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Dokažte, že velikost jeho výšky CD je rovna součtu poloměrů kružnic vepsaných trojúhelníkům ABC, CAD a CBD. [Při běžném označení $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$, $v = |CD|$, $c_a = |AD|$ a $c_b = |BD|$ platí pro poloměry r, r_a, r_b kružnic vepsaných po řadě pravoúhlým trojúhelníkům ABC, CAD a CBD podle úlohy N2 vzorce

$$r = \frac{a+b-c}{2}, \quad r_a = \frac{c_a+v-b}{2} \quad \text{a} \quad r_b = \frac{c_b+v-a}{2}.$$

Jejich sečtením už dostaneme $r + r_a + r_b = v + \frac{1}{2}(c_a + c_b - c) = v$, neboť $c_a + c_b = c$.]

D4. Pravoúhlý trojúhelník má celočíselné délky stran a obvod 11 990. Navíc víme, že jedna jeho odvěsna má prvočíselnou délku. Určete ji. [71–B–I–1]

D5. Pravoúhlý trojúhelník má celočíselné délky stran. Jeho obvod je druhá mocnina přirozeného čísla. Také víme, že jedna jeho odvěsna má délku rovnou druhé mocnině prvočísla. Určete všechny možné hodnoty této délky. [71–B–S–3]

D6. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB a odvěsnami délek $|AC| = 4$ a $|BC| = 3$ leží navzájem se dotýkající kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ tak, že k_1 se dotýká stran AB a AC a k_2 se dotýká stran AB a BC. Určete poloměry r_1 a r_2, jestliže platí $4r_1 = 9r_2$. [62–A–II–3]

6. *Rozhodněte, zda lze čtvercovou tabulku 4×4 vyplnit navzájem různými přirozenými čísly od 1 do 16 tak, že v každém řádku i každém sloupci existuje číslo, jehož sedminásobek je součtem zbylých tří čísel.* (Jaromír Šimša)

Řešení. Dokážeme sporem, že to není možné.

Předpokládejme, že taková vyhovující tabulka existuje. Pak v jejím prvním řádku je číslo a a tři čísla se součtem $7a$, ve druhém číslo b a tři čísla se součtem $7b$, ve třetím číslo c a tři čísla se součtem $7c$, ve čtvrtém číslo d a tři čísla se součtem $7d$. Součty čísel v řádcích jsou pak po řadě $8a$, $8b$, $8c$ a $8d$, takže pro součet všech 16 zapsaných čísel platí

$$8(a+b+c+d) = 1+2+\ldots+16 = (1+16)+(2+15)+\ldots+(8+9) = 8\cdot 17,$$

odkud plyne $a+b+c+d = 17$. Protože součet jakýchkoli tří čísel z tabulky je menší než $3\cdot 16 = 48$, jsou menší než 48 všechna čtyři čísla $7a$, $7b$, $7c$ a $7d$. Proto každé z navzájem různých čísel a, b, c, d je menší než 7. Jejich součet je však 17 a přitom $5+4+3+2 = 14 < 17$, proto jedno z čísel a, b, c, d je rovno 6.

Zopakujeme-li předchozí úvahu pro sloupce uvažované tabulky, zjistíme dohromady, že číslo 6 má v tabulce takovou pozici: číslu $7\cdot 6 = 42$ se rovná jak součet tří dalších čísel z řádku čísla 6, tak součet tří dalších čísel z jeho sloupce. Součet šesti různých čísel tabulky se tak rovná číslu $2\cdot 42 = 84$, přitom však součet šesti největších čísel z tabulky je pouze

$$16+15+14+13+12+11 = (16+11)+(15+12)+(14+13) = 3\cdot 27 = 81.$$

Získaný spor existenci vyhovující tabulky 4×4 vylučuje.

Poznámky.

1. V tabulce vyplněné čísly od 1 do 16

3	1	10	2
8	4	11	9
7	15	5	13
6	12	14	16

se najde – s výjimkou posledního sloupce – v každém řádku i sloupci číslo, jehož sedminásobek je roven součtu ostatních tří čísel (v řádcích jde o čísla 2, 4, 5 a 6, ve sloupcích o čísla 3, 4 a 5). Vidíme, že z osmi požadavků úlohy jich lze splnit sedm.

2. Ukažme, že náš důkaz sporem lze dokončit jinak. Zjistili jsme, že číslo 6 musí sdílet stejný řádek i stejný sloupec v obou případech se třemi čísly, jejichž součet se rovná $7\cdot 6 = 42$. Snadno zjistíme, v úvahu připadají pouze součty $16+15+11$, $16+14+12$ a $15+14+13$. Každé dva z nich však mají společného sčítance, tudíž v řádku a sloupci čísla 6 nemůže být šest dalších navzájem různých čísel.

Jiné řešení. Důkaz sporem zahájíme stejně jako v prvním řešení až do odvození rovnosti $a+b+c+d = 17$ se sčítanci menšími než 7. Dále už budeme pokračovat jinak.

Čísla a, b, c, d se součtem 17 jsou čtyřmi sčítanci ze součtu $1+2+3+4+5+6$ rovného 21. Zbylí dva sčítanci tak mají součet $21-17 = 4$, jde proto o čísla 1 a 3, tudíž platí $\{a, b, c, d\} = \{2, 4, 5, 6\}$. Zdůrazněme, že jde o čtveřici čísel z různých řádků a analogicky rovněž z různých sloupců.

Uvažme nyní pozici čísla 2. Jak víme, v jeho řádku i v jeho sloupci je po třech číslech se součtem rovným $7 \cdot 2 = 14$. Dohromady jde o šest různých čísel se součtem $2 \cdot 14 = 28$, která jsou navíc různá od 2, 4, 5 a 6. Součet takových šesti čísel je však aspoň $1 + 3 + 7 + 8 + 9 + 10 = 38$, což je spor.*

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Rozhodněte, zda lze čtvercovou tabulku 3×3 vyplnit navzájem různými přirozenými čísly od 1 do 9 tak, aby v každém řádku existovalo číslo, které se rovná součtu zbylých dvou čísel. [Nejde to. Důkaz sporem: Mějme vyhovující tabulku. Je-li v jejím prvním řádku je číslo a a další dvě čísla se součtem a, je součet všech tří čísel roven $2a$, což je sudé číslo. Podobně jsou sudé součty čísel v druhém i třetím řádku, a tedy i součet všech 9 čísel v tabulce. Ten je však roven $1 + \ldots + 9 = 45$, spor.]

N2. Rozhodněte, zda lze čtvercovou tabulku 3×3 vyplnit navzájem různými přirozenými čísly od 1 do 9 tak, aby v každém řádku existovalo číslo, jehož čtyřnásobek se rovná součtu zbylých dvou čísel. [Nejde to. Důkaz sporem: Mějme vyhovující tabulku. V prvním řádku je číslo a a zbylá dvě čísla se součtem $4a$, součet všech tří čísel tak je $5a$. Analogický význam jako a bude mít číslo b z druhého řádku a číslo c z třetího řádku. Součet 45 všech 9 čísel v tabulce je tak roven $5(a + b + c)$, odkud $a + b + c = 9$. Protože součet jakýchkoli dvou čísel z tabulky nepřevyšuje $9 + 8 = 17$, platí to i pro čísla $4a$, $4b$ a $4c$, takže $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4\}$. Spolu s $a + b + c = 9$ to znamená, že $\{a, b, c\} = \{2, 3, 4\}$. Číslo 4 tak sdílí řádek s dvěma čísly o součtu $4 \cdot 4 = 16$, jde tedy o čísla 7 a 9. Odtud už plyne, že číslo 3 nemůže sdílet řádek s dvěma čísly o součtu $4 \cdot 3 = 12$, neboť každá z příhodných dvojic $(3, 9)$, $(4, 8)$ a $(5, 7)$ je vyloučena kvůli řádku s čísly 4, 7, 9.]

N3. Tabulka 4×4 je vyplněna různými celými čísly od 1 do 16. Jisté číslo s v této tabulce má tu vlastnost, že jeho čtyřnásobek je roven jak součtu ostatních tří čísel z jeho řádku, tak součtu ostatních tří čísel z jeho sloupce. Určete největší možné takové s. [9. Nechť vyhovující číslo s sdílí řádek s trojicí čísel (a, b, c), a sloupec s trojicí (d, e, f). Sečtením rovností $4s = a + b + c$ a $4s = d + e + f$ dostaneme, že číslo $8s$ je rovno součtu šesti různých čísel z tabulky, který nepřevyšuje součet čísel od 11 do 16 rovný 81. Platí tudíž $8s \leqq 81$, odkud $s \leqq 10$. Hodnota $s = 10$ ovšem možná není: součty $a + b + c$ a $d + e + f$ by musely být (až na pořadí sčítanců) mezi součty $16 + 15 + 9$, $16 + 13 + 11$, $15 + 14 + 11$ a $15 + 13 + 12$ – každé dva z nich však mají společný sčítanec. Hodnota $s = 9$ už možná je: uvažme tabulku, ve které číslo 9 sdílí řádek s trojicí $(16, 15, 5)$ a sloupec s trojicí $(14, 12, 10)$, ostatní čísla jsou rozmístěna jakkoli.]

D1. Tabulka 10×10 je vyplněna čísly 1 a -1 tak, že součet čísel v každém řádku i sloupci je dělitelný třemi. Určete největší možný součet čísel v tabulce a ukažte, že větší být nemůže. Uveďte rovněž příklad tabulky s určeným největším součtem. [71–C–S–1]

D2. Na školní zahradě hraje skupina žáků hru zvanou molekuly. Učitel jim nejprve uložil, aby se rozdělili do trojic. Jeden žák přebyl, a tak z další hry vypadl. Zbylí žáci se pak měli rozdělit do čtveřic. Opět jeden žák přebyl a vypadl. Poté se zbylí žáci měli rozdělit do pětic, zase jeden žák přebyl a vypadl. Učitel nyní ukládá, aby se zbylí žáci rozdělili do šestic. Dokažte, že opět jeden žák přebyde. [71–C–I–1]

D3. Tabulka 10×10 je vyplněna čísly 1 a -1 tak, že součet čísel v každém řádku až na jeden je roven 0 a součet čísel v každém sloupci až na jeden je roven stejnému číslu s. Určete největší možnou hodnotu s a ukažte, že větší být nemůže. Uveďte rovněž příklad tabulky s určenou největší hodnotou s. [71–C–II–4]

* Jiné dokončení: Obě trojice čísel, které sdílejí s číslem 2 stejný řádek nebo stejný sloupec, musí být složena z čísel 1, 3 a 10, neboť jiná tři v úvahu připadající čísla s požadovaným součtem $7 \cdot 2 = 14$ zřejmě neexistují.

D4. Tabulka 10×10 je vyplněna čísly -4, 3 a 10 tak, že součet čísel v každém řádku až na jeden je nejvýš 0 a součet čísel v každém sloupci až na jeden je nejvýš 0. Určete největší možný součet čísel v tabulce. [71–B–II–4]

D5. V tabulce $n \times n$, kde $n \geqq 2$, jsou po řádcích zapsána postupně celá čísla od 1 do n^2 (v prvním řádku po řadě čísla od 1 do n, ve druhém čísla od $n+1$ do $2n$ atd.) V jednom kroku můžeme vybrat libovolná dvě čísla na sousedních políčkách (tj. na takových, která mají společnou stranu) a – pokud je jejich aritmetický průměr celé číslo – tímto průměrem obě čísla nahradíme. Pro která n je možné po konečném počtu kroků dostat tabulku, ve které jsou všechna čísla stejná? [Slovenská MO, 57–A–II–3]

D6. Pro která přirozená čísla n lze do tabulky $n \times n$ vepsat všechna celá čísla od 1 do n^2 tak, aby aritmetický průměr čísel v každém řádku i sloupci tabulky byl celým číslem? [68–A–III–6]