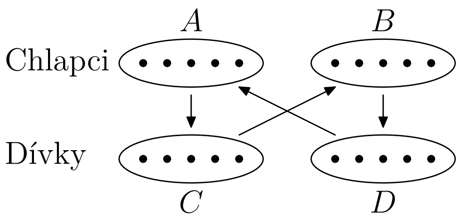
73. ročník Matematické olympiády (2023/2024)

Úlohy domácího kola kategorie A

1. *Na párty se sešlo* 20 *osob, z toho* 10 *chlapců a* 10 *dívek. Každému se líbí právě k osob opačného pohlaví. Je vždy možné vytvořit pár, v němž se oběma líbí ten druhý? Řešte a) pro $k = 5$, b) pro $k = 6$.* (Josef Tkadlec)

Řešení. a) Ukážeme, že pro $k = 5$ mohou sympatie na párty dopadnout tak, že hledaný pár neexistuje. Předpokládejme, že chlapce lze rozdělit na dvě pětičlenné skupiny A a B a dívky na dvě pětičlenné skupiny C a D tak, že platí: všem chlapcům z A se líbí právě dívky z C, všem chlapcům z B právě dívky z D, všem dívkám z C se líbí právě chlapci z B a všem dívkám z D právě chlapci z A (viz obrázek). Tehdy se skutečně každému líbí právě $k = 5$ osob opačného pohlaví, avšak neexistuje jediný pár se vzájemnými sympatiemi.



b) Dokážeme, že pro $k = 6$ dvojice požadované vlastnosti existuje.

V případě $k = 6$ je počet dvojic opačného pohlaví, v nichž se chlapci líbí dívka, roven číslu $10k = 60$. Stejně tak je roven 60 počet dvojic, v nichž se dívce líbí chlapec. Tyto dvě skupiny dvojic nemohou mít prázdný průnik, neboť $60 + 60 = 120$ a všech dvojic opačného pohlaví je pouze $10 \cdot 10 = 100$. Nutně tak existuje pár, v němž se oběma líbí ten druhý.*

Komentář. V řešení části a) jsme uvážili množinu všech dvojic opačného pohlaví a dvě její podmnožiny: množinu A těch dvojic, ve kterých se dívka líbí chlapci, a množinu B těch dvojic, ve kterých se chlapec líbí dívce. Podle známého Vennova diagramu platí

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|, \tag{1}$$

kde $|X|$ značí počet prvků množiny X. V případě $k = 6$ je $|A| = |B| = 60$, takže z odhadu $|A \cup B| \leqq 100$ podle (1) vidíme, že $A \cap B$ je nejen neprázdná množina (jak jsme měli dokázat), ale že má dokonce alespoň 20 prvků (jak je uvedeno v poznámce pod čarou).

Jiné řešení. Část b) lze vyřešit rovněž následovně. Pokud v případě $k = 6$ rozdá každý z 10 chlapců po jedné růži těm dívkám, které se mu líbí, bude všem 10 dívkám rozdáno celkem 60 růží. Jedna dívka tak dostane průměrně $60 : 10 = 6$ růží, některá z nich proto obdrží aspoň 6 růží. Jelikož se jí líbí 6 z 10 chlapců, musí aspoň 2 růže dostat od chlapců, kteří se jí líbí.

* Z naší úvahy plyne, že takových dvojic existuje alespoň $120 - 100 = 20$. V úloze D1 ukážeme, že jich může být právě 20.

Návodné a doplňující úlohy:

V následujících úlohách předpokládáme, že na dané párty jsou alespoň dvě osoby a známosti jejích účastníků jsou vzájemné. To se ovšem netýká sympatií z návodné úlohy N1 a doplňující úlohy D1.

N1. U stolu sedí tři chlapci a čtyři dívky. Každému chlapci se líbí tři dívky, každé dívce jen jeden chlapec. Existuje mezi nimi vždy dvojice opačného pohlaví, ve které se oběma líbí ten druhý? [Ano. Všech dvojic je 12. Uvažte, v kolika z nich se a) chlapci líbí dívka, b) dívce líbí chlapec. Nebo podle celkového počtu chlapeckých sympatií dokažte, že některá dívka se líbí všem třem chlapcům (užitím Dirichletova principu nebo sporem).]

N2. Na párty se každého z návštěvníků zeptáme, kolik ostatních návštěvníků zná. Ukažte, že pokud jejich odpovědi sečteme, vyjde vždy sudé číslo. [Návod: Kolikrát jsme počítali každou známost?]

N3. Ukažte, že na každé párty lze nalézt aspoň dva účastníky, kteří tam mají stejný počet známých. [Na párty o n účastnících je počet známých každého jedno z n čísel $0, 1, \ldots, n-1$. Aspoň dva z těchto n počtů musí být stejné, neboť je vyloučeno, aby se jeden počet rovnal číslu 0 a jiný číslu $n-1$, tudíž různých počtů je nejvýše $n-1$.]

D1. Může se na párty ze soutěžní úlohy v případě $k = 6$ stát, že bude existovat právě 20 párů, v nichž se oběma líbí ten druhý? [Ano. Popíšeme jeden z mnoha možných příkladů. Pět čtyřčlenných skupin po 2 chlapcích a 2 dívkách rozestavme po obvodu kruhu a vyberme „kladný“ směr jeho procházení. Předpokládejme, že každému chlapci se líbí právě 2 dívky z jeho skupiny a další 4 dívky ze dvou skupin, které jsou od jeho skupiny nejbližší v kladném směru, a že podobně každé dívce se líbí právě 2 chlapci z její skupiny a další 4 chlapci ze dvou skupin, které jsou od její skupiny nejbližší v kladném směru. Pak všechny páry se vzájemnými sympatiemi jsou částmi vytvořených pěti čtveřic a jejich počet tak je $5 \cdot 2 \cdot 2 = 20$.]

D2. Na párty se každý účastník zná s právě třemi dalšími. Ukažte, že počet účastníků párty je sudý. Dále uveďte příklady známostí na takových párty s 6, 8 a 2024 účastníky. [Označte n počet účastníků a uvažte, že dvojnásobek počtu všech známostí na párty je sudé číslo, které se rovná $3n$. Pro $n = 6$ si představte, že účastníci jsou rozmístěni na obvodu kruhu a že se znají právě ti, co spolu nesousedí (možné jsou i jiné příklady). Pro n rovné 8, 2024 nebo obecně $n = 4k$ uvažte například situaci, kdy účastníci jsou rozděleni do k čtveřic, přičemž navzájem se znají právě lidé ze stejné čtveřice.]

D3. V jistém městě mají vybudovanou síť na šíření pomluv, v níž si každý pomlouvač vyměňuje informace se třemi pomlouvačkami a každá pomlouvačka si vyměňuje informace se třemi pomlouvači. Jinak se pomluvy nešíří. a) Dokažte, že pomlouvačů a pomlouvaček je stejný počet. b) Předpokládejme, že síť na pomlouvání je souvislá (pomluvy od libovolného pomlouvače a libovolné pomlouvačky se mohou dostat ke všem ostatním). Dokažte, že i když jeden pomlouvač zemře, zůstane síť souvislá. [B–61–I–5]

D4. Lukáš a Marek, kteří se znají, se sešli na párty, na níž platilo: Mají-li někteří dva účastníci stejný počet známých, pak nemají žádného společného známého. Dokažte, že na párty je někdo, kdo tam má právě jednoho známého. Návod: Nejprve vyberte jednoho účastníka, který zná na párty největší počet osob. [Označme X jednoho z těch účastníků, kteří na párty znají nejvíce, řekněme k osob. Podle zadání je $k \geqq 1$, v případě $k = 1$ jsme hotovi. Je-li $k > 1$, žádní dva z k známých vybraného X nemají stejný počet známých, takže těchto k počtů tvoří celou množinu $\{1, 2, \ldots, k\}$.]

D5. Ve společnosti lidí jsou některé dvojice spřátelené. Pro každé celé $k \geqq 3$ řekneme, že společnost je k-dobrá, pokud lze každou k-tici lidí ze společnosti rozesadit kolem kruhového stolu tak, že se každí dva sousedé přátelí. Dokažte, že je-li společnost 6-dobrá, pak je i 7-dobrá. [A–67–III–1]

D6. Ve skupině 90 dětí má každé aspoň 30 kamarádů (kamarádství je vzájemné). Dokažte, že je lze rozdělit do tří 30členných skupin tak, aby každé dítě mělo ve své skupině aspoň jednoho kamaráda. [A–61–III–5]

2. *Z číslic 1 až 9 vytvoříme devítimístné číslo s navzájem různými číslicemi. Poté vypočítáme součet každé trojice sousedních číslic a těchto sedm součtů zapíšeme vzestupně. Rozhodněte, zda lze takto získat posloupnost*

a) 11, 15, 16, 18, 19, 21, 22,

b) 11, 15, 16, 18, 19, 21, 23. (Patrik Bak)

Řešení. a) Ano, vyhovuje například číslo 137 658 942. Součty trojic jeho sousedních číslic totiž zleva doprava jsou 11, 16, 18, 19, 22, 21, 15.

b) Ukážeme, že pro každé devítimístné číslo $\overline{a_1a_2\ldots a_8a_9}$ sestavené z číslic 1 až 9 platí, že součet sedmi čísel určených zadáním úlohy je nejvýše 122. Jelikož pro čísla ze zadání b) platí $11 + 15 + 16 + 18 + 19 + 21 + 23 = 123$, ukážeme tím, že požadované devítimístné číslo neexistuje.

Uvažovaný součet S sedmi čísel lze zapsat a posléze odhadnout následovně:

$$\begin{aligned} S &= (a_1 + a_2 + a_3) + (a_2 + a_3 + a_4) + \ldots + (a_6 + a_7 + a_8) + (a_7 + a_8 + a_9) = \\ &= a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 3a_4 + 3a_5 + 3a_6 + 3a_7 + 2a_8 + a_9 = \\ &= 3(\underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_8 + a_9}_{=1+2+\ldots+9=45}) - (\underbrace{a_1 + a_2 + a_8 + a_9}_{\geqq 1+2+3+4=10}) - (\underbrace{a_1 + a_9}_{\geqq 1+2=3}) \leqq \\ &\leqq 3 \cdot 45 - 10 - 3 = 122. \end{aligned}$$

Tím je tvrzení z první věty našeho řešení části b) dokázáno.

Komentář. Přestože je výše uvedené řešení úplné, ukážeme nyní, jak lze přijít na příklad vyhovujícího čísla z řešení části a). Najdeme je dokonce všechna, a to na základě pozorování, které nás dovedlo i k řešení části b).

Prvním dobrým krokem je povšimnout si, že obě sedmice čísel ze zadání úlohy obsahují „poměrně velká“ čísla na to, aby vznikla ze všech zastoupených číslic 1 až 9. To nás může motivovat k posouzení celkového součtu S všech sedmi zadaných čísel. Jak může být tento součet velký? Odpověď na tuto otázku jistě souvisí s tím, kolikrát je která číslice v součtu S zastoupena. Proto už je vcelku snadné přijít na horní odhad S číslem 122 způsobem, jakým jsme to výše provedli.

Dodejme nyní, co jsme v řešení části b) nepotřebovali. Z našeho odvození plyne, že rovnost $S = 122$ nastane, právě když číslo $\overline{a_1 \ldots a_9}$ splňuje rovnosti

$$\{a_1, a_2, a_8, a_9\} = \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{a} \quad \{a_1, a_9\} = \{1, 2\},$$

neboli $\{a_1, a_9\} = \{1, 2\}$ a $\{a_2, a_8\} = \{3, 4\}$.*

Protože součet $11 + 15 + 16 + 18 + 19 + 21 + 22$ čísel zadaných v části a) má právě posouzenou hodnotu 122, jsou hledaná vyhovující čísla $\overline{a_1a_2\ldots a_8a_9}$ s číslicemi 1 až 9 právě ta, pro která platí $\{a_1, a_9\} = \{1, 2\}$ a $\{a_2, a_8\} = \{3, 4\}$. Podle možných pozic číslic 1, 2, 3, 4 tak připadají v úvahu pouze 4 typy čísel.

Zkoumejme nejprve čísla $\overline{13a_3\ldots a_742}$. Aby $1+3+a_3$ byl jeden z předepsaných součtů, musí být $a_3 = 7$; podobnou úvahou o součtu $a_7 + 4 + 2$ pak nutně $a_7 = 9$. Máme tedy čísla $\overline{137a_4a_5a_6942}$. Zbývá tak posoudit šest způsobů, jak trojici a_4, a_5 a a_6 přiřadit zbylé

* Je snadné příklad takového čísla uvést, proto 122 je *největší možná* hodnota součtu S.

číslice 5, 6 a 8. Jednotlivé způsoby už je snadné otestovat, s výhodou je přitom možné některé z nich předem vyloučit (například využít toho, že $a_4 \neq 5$). Bez těchto podrobností uveďme, že ve výsledku dostaneme právě dvě vyhovující čísla 137 658 942 a 137 685 942.

Zkoumání čísel $\overline{14a_3 \dots a_7 32}$ je kratší: Tentokrát zjistíme, že obě číslice a_3 a a_7 by musely být rovny 6, tudíž žádné číslo tohoto typu nevyhovuje.

Posuzování zbylých čísel $\overline{23a_3 \dots a_7 41}$ a $\overline{24a_3 \dots a_7 31}$ už není nutné. Stačí je převést na předchozí dva typy, a to díky obecnému postřehu: číslo $\overline{a_1 a_2 \dots a_8 a_9}$ vyhovuje zadání, právě když mu vyhovuje „zrcadlově převrácené“ číslo $\overline{a_9 a_8 \dots a_2 a_1}$.

Shrněme, co jsme zjistili: Čísla, která vyhovují zadání a), jsou právě čtyři. Jsou to čísla 137 658 942, 137 685 942 a jejich „zrcadlové obrazy“ 249 856 731 a 249 586 731.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Najděte ta pětimístná čísla, z nichž každé má pět různých lichých číslic, přitom součet prvních tří číslic je 11 a součet posledních tří číslic je 15. [Prostřední číslice musí být 1, protože $11 + 15$ je o jedna větší než $1 + 3 + 5 + 7 + 9$. Na prvních dvou místech pak musí být 3 a 7, na posledních dvou 9 a 5. Všechna taková čísla vyhovují: 37159, 37195, 73159, 73195.]

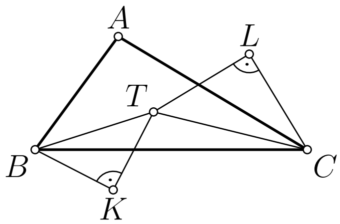
N2. Určete největší možné hodnoty následujících součtů, ve kterých $a_1, a_2, \dots, a_8, a_9$ je libovolné pořadí číslic $1, 2, \dots, 8, 9$:
a) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8$,
b) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + 2a_9$,
c) $a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + 2a_5 + 2a_6 + 2a_7 + 2a_8 + a_9$.
[a) $45 - 1 = 44$, b) $45 + 9 = 54$, c) $2 \cdot 45 - (1 + 2) = 87$.]

D1. Nalezněte největší možné šestimístné číslo, jehož každá číslice (počínaje třetí číslicí zleva) je součtem předchozích dvou. [303 369. Číslice zleva doprava jsou a, b, $a+b$, $a+2b$, $2a+3b$ a $3a + 5b$. Z nerovnosti $3a + 5b \leqq 9$ plyne $a \leqq 3$, přitom pro $a = 3$ je nutně $b = 0$.]

D2. Dané přirozené číslo n má číslice, jejichž hodnoty se zleva doprava zvětšují. Ukažte, že ciferný součet čísla $9n$ je vždy roven devíti. Návod: $9n = 10n - n$. [Má-li dané n číslice $c_1 < c_2 < \dots < c_k$, jsou číslice rozdílu $10n - n$ podle písemného algoritmu pro odčítání zleva doprava rovny c_1, $c_2 - c_1$,…, $c_{k-1} - c_{k-2}$, $c_k - (c_{k-1} + 1)$, $10 - c_k$. Jejich součet je skutečně 9.]

D3. Nalezněte největší možné přirozené číslo, jehož každá číslice (kromě obou krajních) je menší než aritmetický průměr číslic sousedních. [96 433 469. Číslo se zápisem $\overline{c_1 c_2 \dots c_n}$, kde $n \geqq 3$, vyhovuje zadání, právě když platí $c_{i+1} - c_i > c_i - c_{i-1}$ pro každé přípustné i. Hledáme tak největší číslo, pro něž je odpovídající posloupnost rozdílů $c_2 - c_1$, $c_3 - c_2, \dots$, $c_n - c_{n-1}$ rostoucí. Nechť je prvních k rozdílů záporných a posledních $n - 1 - k$ rozdílů nezáporných. Jejich součty jsou po řadě $c_{k+1} - c_1 \geqq -9$ a $c_n - c_{k+1} \leqq 9$. Odtud s ohledem na $1 + 2 + 3 + 4 > 9$ plyne, že $k \leqq 3$ a $n - 1 - k \leqq 4$ (je možný i rozdíl 0) neboli $n - k \leqq 5$. Proto $n = k + (n - k) \leqq 8$. Ukažme, že pro $n = 8$ (kdy nutně $k = 3$) vyhovující číslo existuje. Protože hledáme co největší takové, vybereme $c_1 = 9$ (ostatně c_1 je možno vždy zvětšit). Pak ovšem z $c_1 = 9$ a $k = 3$ plyne, že $c_2 - c_1 \leqq -3$ neboli $c_2 \leqq 6$, přitom pro $c_2 = 6$ je nutně $c_3 - c_2 = -2$ a $c_4 - c_1 = -1$, takže pak čtyřčíslí $c_1 c_2 c_3 c_4$ je rovno 9643. Z podmínky nezápornosti čísla $c_5 - c_4$ při $c_4 = 3$ ovšem snadno plyne, že jediné vyhovující čtyřčíslí $c_5 c_6 c_7 c_8$ pak je 3469.]

3. *Je dán trojúhelník ABC s těžištěm T. Nad úsečkami BT a CT jsou sestrojeny pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky BTK a CTL stejně jako na obrázku. Označme D střed strany BC a E střed úsečky KL. Určete všechny možné hodnoty poměru $|AT| : |DE|$.* (Michal Rolínek)

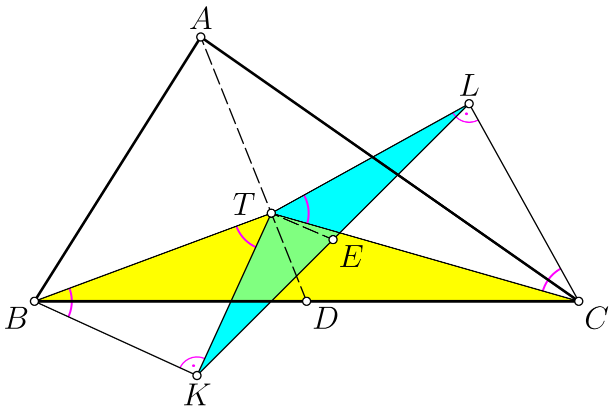


ŘEŠENÍ. Dokážeme, že poměr $|AT| : |DE|$ má jedinou možnou hodnotu $2\sqrt{2}$.

Nejprve odvodíme, že pro délky úseček TD a TE platí $|TD|/|DE| = \sqrt{2}$.* Zaměříme se při tom na trojúhelníky BTC a KTL, které jsou vybarveny na obrázku. Jejich úhly u společného vrcholu T jsou shodné, neboť platí

$$|\sphericalangle BTC| = |\sphericalangle BTK| + |\sphericalangle KTC| = 45^\circ + |\sphericalangle KTC| = |\sphericalangle KTC| + |\sphericalangle CTL| = |\sphericalangle KTL|.$$

Navíc platí $|BT|/|TC| = |KT|/|TL|$ díky podobnosti trojúhelníků BKT a CLT. Proto jsou podle věty *sus* naše trojúhelníky BTC a KTL podobné, a to v poměru $|BT| : |KT|$ s hodnotou $\sqrt{2}$ (díky pravoúhlému rovnoramennému trojúhelníku BKT). Pro délky příslušných těžnic TD a TE vyznačených trojúhelníků tudíž skutečně platí $|TD|/|TE| = \sqrt{2}$.



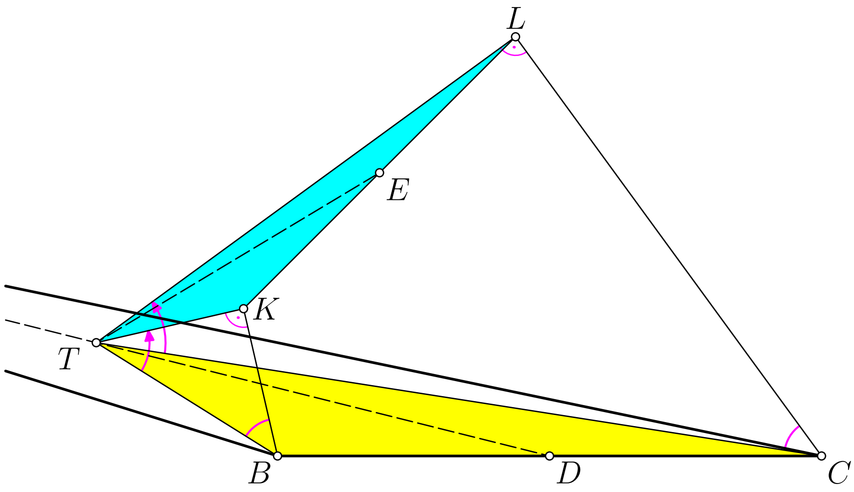
Odvozený výsledek zbývá spojit s poznatkem, že pro těžiště T trojúhelníku ABC platí $|AT| = 2|TD|$. Dostaneme tak

$$\frac{|AT|}{|DE|} = \frac{2|TD|}{|DE|} = 2\sqrt{2}.$$

Tím je důkaz tvrzení z první věty řešení hotov.

POZNÁMKA. Úlohu jsme řešili v situaci jako na zadaném obrázku, podle kterého je trojúhelník BTK přikreslen do poloroviny BTC a trojúhelník CTL do poloroviny CTA. Potřebnou shodnost úhlů BTC a KTL jsme v řešení odvodili za předpokladu, že bod K leží v úhlu BTC jako na obrázku ze zadání. Tento předpoklad je splněn jen pro ty výchozí trojúhelníky ABC, ve kterých zmíněný úhel BTC má velikost alespoň 45°. Tak tomu ovšem není například na dalším obrázku. Proč jsou úhly BTC a KTL shodné *vždy*, lze zdůvodnit následovně: Díky zadání jsou orientované úhly BTK a CTL shodné (mají

* Je možné dokonce ukázat, že TDE je rovnoramenný trojúhelník s pravým úhlem u vrcholu E, ale to k řešení úlohy potřebovat nebudeme.

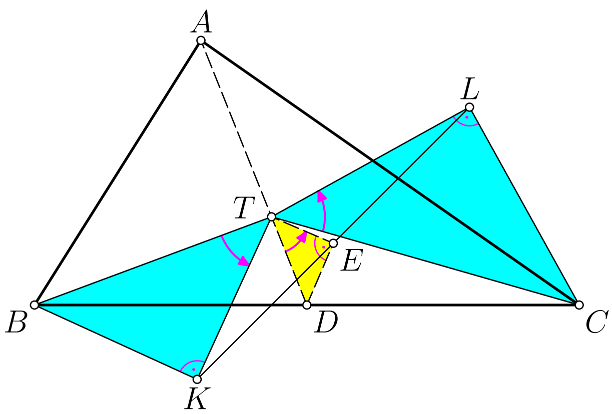


totiž oba velikost 45° a stejnou orientaci jako úhel BTC), tudíž v jimi určeném otočení se středem T bude obrazem úhlu BTC právě úhel KTL.

JINÉ ŘEŠENÍ. Poznatky odvozené v hlavní části prvního řešení získáme nyní postupem, při kterém využijeme rovinná zobrazení. Omezíme se přitom pouze na důkaz toho, že pro délky úseček TD a TE platí rovnost $|TD|/|DE| = \sqrt{2}$. Zjistíme navíc i to, co jsme napsali v poznámce pod čarou k úvodní větě prvního řešení, že totiž TDE je rovnoramenný trojúhelník s pravým úhlem u vrcholu E.

Při novém postupu využijeme otočení se středem T, o kterém jsme již pojednali v předchozí poznámce. Složíme ho ještě s vhodnou stejnolehlostí, která bude mít týž střed T. Dostaneme tak podobné zobrazení zvané *spirální podobnost se středem* T. Zmíníme se o něm také v úvodním odstavci k návodným úlohám. Tam rovněž najdete odkaz na vhodný studijní text.

Uvažme tedy spirální podobnost $\mathcal{S}$ se středem T, koeficientem $\sqrt{2}/2$ a orientovaným úhlem BTK, který je shodný s orientovaným úhlem CTL téže velikosti 45°.



V našem zobrazení $\mathcal{S}$ přejde bod B do bodu K a bod C do bodu L. Z toho plyne, že obrazem úsečky BC je úsečka KL.* Znamená to, že také střed D úsečky BC přejde do středu E úsečky KL. Z $B \to K$, $C \to L$ a $D \to E$ jak známo plyne, že trojúhelník

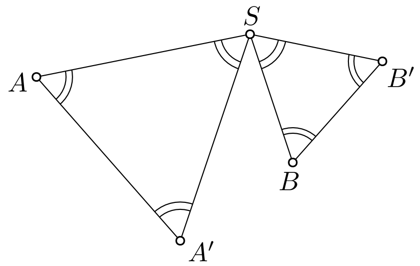
* Díky tomu obrazem trojúhelníku BTC je trojúhelník KTL. Podobnost těchto dvou trojúhelníků byla základem našeho prvního řešení, ve kterém jsme se užití spirální podobnosti vyhnuli.

TDE je podobný s oběma trojúhelníky TBK a TCL,* takže také TDE je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník, který přitom má pravý úhel u vrcholu E. Tím je slíbené tvrzení dokázáno.

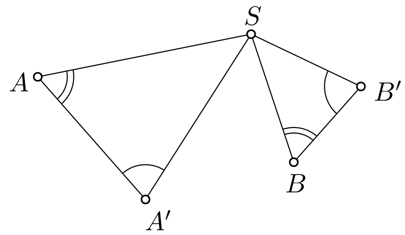
Návodné a doplňující úlohy:

Při řešení návodných a doplňujících úloh lze s výhodou využít *spirální podobnosti.*** Tak běžně nazýváme podobná zobrazení, která jsou výsledky složení stejnolehlosti a otočení se společným středem, který pak nazýváme *středem* dané spirální podobnosti.

N1. Navzájem různé body S, A, A', B, B' jsou zvoleny tak, že oba trojúhelníky SAA' a $SB'B'$ jsou rovnostranné, přičemž při pohledu z bodu S jsou body A, A', B, B' právě takto uspořádány v kladném směru (jako na obrázku). Dokažte tvrzení: (i) Trojúhelníky SAB a $SA'B'$ jsou shodné. (ii) Označíme-li S_{AB} a $S_{A'B'}$ po řadě středy úseček AB a $A'B'$, je trojúhelník $SS_{AB}S_{A'B'}$ rovnostranný.



(N1)



(N2)

[Uvažte otočení se středem S a úhlem $+60°$. Co je obrazem úsečky AB? Co je obrazem bodu S_{AB}?]

N2. Dokažte obměnu obou tvrzení z N1 pro obecnější situaci, kdy trojúhelníky SAA' a SBB' jsou (přímo) podobné (jako na obrázku):
(i) $\triangle SAB \sim \triangle SA'B'$, (ii) $\triangle SS_{AB}S_{A'B'} \sim \triangle SAA' \sim \triangle SBB'$. [Uvažte složení stejnolehlosti a otočení se společným středem v bodě S (neboli spirální podobnost se středem S), které zobrazí A na A', a tedy rovněž B na B'. Pak proveďte analogické úvahy jako při řešení úlohy N1.]

D1. Vně trojúhelníku ABC leží body D, E, F takové, že trojúhelníky BCD, CAE a ABF jsou rovnostranné. Ukažte, že těžiště těchto trojúhelníků tvoří rovnostranný trojúhelník. [Označte zmíněná těžiště po řadě A_1, B_1, C_1 a uvažte spirální podobnost se středem v C, která zobrazuje B_1 na A, a tedy rovněž A_1 na D. Pro úsečku B_1A_1 a její obraz AD pak platí $|AD| = \sqrt{3}|B_1A_1|$. Analogickými úvahami odvodíme nejen $|BE| = \sqrt{3}|C_1B_1|$ a $|CF| = \sqrt{3}|A_1C_1|$, ale také $|BE| = \sqrt{3}|A_1B_1|$, $|CF| = \sqrt{3}|B_1C_1|$ a $|AD| = \sqrt{3}|C_1A_1|$. Odtud již plyne $|A_1B_1| = |A_1C_1| = |B_1C_1|$.]

D2. Uvnitř pravoúhlého trojúhelníku ABC s přeponou AB a vnitřním úhlem při vrcholu A o velikosti $60°$ existuje bod P, pro který platí $|\sphericalangle APB| = 120°$, $|BP| = 4$ a $|CP| = 1$. Určete délku úsečky AP. [$|AP| = 2$. Uvažte spirální podobnost se středem v bodě A, která zobrazí C na B. Obraz bodu P označte P'. Koeficient této podobnosti je $|BA|/|CA| = 1/\cos 60° = 2$, tudíž pro obraz BP' úsečky CP o délce 1 platí $|BP'| = 2$. Dále z $\triangle ABC \sim \triangle AP'P$ (podle věty *sus*) plyne $|\sphericalangle AP'P| = 30°$ a $|\sphericalangle APP'| = 90°$, tudíž $|\sphericalangle P'PB| = |\sphericalangle APB| - |\sphericalangle APP'| = 30°$, což spolu s $|BP| = 4$ a $|BP'| = 2$ dává $|\sphericalangle BP'P| = 90°$. Příčka PP' tak svírá shodné střídavé úhly jak s přímkami AP a $P'B$, tak s přímkami AP' a BP. Čtyřúhelník $APBP'$ je proto rovnoběžník, odkud $|AP| = |BP'| = 2$.]

* Toto tvrzení, které není nutné v úplném řešení zdůvodňovat, plyne z toho, že při spirální podobnosti se středem T jsou všechny trojúhelníky TXX', kde X' je obraz X, navzájem podobné díky větě *sus*.

** S tímto pojmem a jeho užitím při řešení mnoha úloh se lze přístupným způsobem seznámit v bakalářské práci Tomáše Hrdličky *Spirální podobnost v planimetrii* se seznamem užité literatury, který zahrnuje odkazy na další (internetové) zdroje.

4. *O lichém prvočísle p řekneme, že je* speciální*, pokud součet všech prvočísel menších než p je násobkem p. Existují dvě po sobě jdoucí prvočísla, která jsou speciální?*

(Jaroslav Zhouf)

ŘEŠENÍ. Dokážeme sporem, že dvě po sobě jdoucí speciální prvočísla neexistují.

Nechť $p_1 = 2 < p_2 = 3 < p_3 < \ldots$ je rostoucí posloupnost všech prvočísel. Připusťme, že pro některé $n \geqq 2$ jsou obě prvočísla p_n a p_{n+1} speciální. Pak existují přirozená čísla a, b taková, že platí rovnosti

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} = ap_n \quad \text{a} \quad p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} + p_n = bp_{n+1}. \tag{1}$$

Po dosazení součtu z prvního vztahu do druhého dostaneme $ap_n + p_n = bp_{n+1}$ neboli $(a+1)p_n = bp_{n+1}$. Prvočíslo p_n tak dělí součin bp_{n+1} a je přitom nesoudělné s prvočíslem p_{n+1}, takže dělí číslo b. Proto platí $b = cp_n$ pro vhodné přirozené číslo c. Po dosazení $b = cp_n$ do druhé rovnosti v (1) dostaneme

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} + p_n = cp_n p_{n+1}.$$

Ukážeme však, že namísto této rovnosti platí ostrá nerovnost

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} + p_n < cp_n p_{n+1}.$$

Sečteme-li totiž nerovnosti $p_i < p_n$ pro $i = 1, \ldots, n-1$ s rovností $p_n = p_n$ a přihlédneme-li pak po řadě ke zřejmým nerovnostem $p_{n+1} > n$ a $c \geqq 1$, dostaneme

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} + p_n < np_n < p_{n+1}p_n \leqq cp_n p_{n+1}.$$

Tím je důkaz sporem ukončen.*

POZNÁMKA. Speciální prvočísla skutečně existují. Všechna dosud známá jsou

$$5,\ 71,\ 369\,119,\ 415\,074\,643,\ 55\,691\,042\,365\,834\,801.$$

Případný další vývoj lze sledovat na `https://oeis.org/A007506`.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Najděte všechny dvojice přirozených čísel u a v, ve kterých u je dělitelem $2v$ a v je dělitelem $3u$. [Existují přirozená a, b tak, že $2v = au$ a $3u = bv$. Vynásobením dostaneme $6vu = abuv$ neboli $ab = 6$. Proto (a, b) je nutně jedna z dvojic $(1, 6)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(6, 1)$. Požadované rovnosti $2v = au$ a $3u = bv$ se pak po řadě redukují na $u = 2v$, $u = v$, $u = \frac{2}{3}v$, $u = \frac{1}{3}v$. Vyhovují tedy právě dvojice (u, v) tvarů $(2n, n)$, (n, n), $(2n, 3n)$ a $(n, 3n)$, kde n je přirozené číslo.]

N2. Ukažte, že pro žádné liché prvočíslo p není součet $1 + 2 + 3 + \ldots + p$ dělitelný nějakým prvočíslem větším než p. [Daný součet je roven $\frac{1}{2}p(p+1)$, tudíž každý jeho prvočinitel q dělí některé z čísel p nebo $p + 1$, a proto $q \leqq p$, neboť prvočíslo p je liché, a tak sudé číslo $p + 1$ je aspoň 4, a je tedy složené.]

* Dokázali jsme vlastně obecnější tvrzení: V žádné rostoucí posloupnosti navzájem nesoudělných přirozených čísel se nenajdou dva sousední členy, z nichž každý je dělitelem součtu všech jemu předcházejících členů.

N3. Pro dané liché prvočíslo p označme S součet všech přirozených čísel menších než p, která mají ve svých dekadických zápisech alespoň jednu číslici z dekadického zápisu čísla p. Ukažte, že pokud $p \mid S$, pak číslo S nemá kromě p žádného prvočinitele většího než $\frac{1}{2}(p-1)$. [Zřejmě $S \leqq 1+2+\ldots+(p-1) = \frac{1}{2}p(p-1)$, odkud $S/p \leqq \frac{1}{2}(p-1)$, kde S/p je přirozené číslo díky předpokladu $p \mid S$. Je-li proto q nějaký prvočinitel čísla S různý od p, je i prvočinitelem čísla S/p, které samo jak víme nepřevyšuje $\frac{1}{2}(p-1)$.]

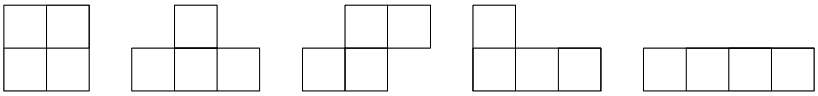
D1. Ukažte, že součet dvou po sobě jdoucích prvočísel nemůže být dvojnásobek jiného prvočísla. [Pro důkaz sporem při zřejmém označení rovnost $p_n + p_{n+1} = 2q$ přepišme do tvaru $\frac{1}{2}(p_n + p_{n+1}) = q$. Číslo q tedy leží uvnitř otevřeného intervalu (p_n, p_{n+1}), ve kterém však nejsou žádná prvočísla.]

D2. Dokažte, že pokud pro přirozená čísla a, b, c platí, $a+b+c \mid abc$, pak je $a+b+c$ složené číslo. [Sporem: Pokud by číslo $s = a+b+c$ bylo prvočíslo, bylo by dělitelem (díky zadané podmínce $s \mid abc$) aspoň jednoho z čísel a, b, c. Ta jsou však všechna tři menší než jejich součet s, což je spor.]

D3. Pro každé $n > 1$ označme S_n součet n prvních prvočísel. Ukažte, že v intervalu $\langle S_n, S_{n+1} \rangle$ leží vždy druhá mocnina některého přirozeného čísla. [Ukažme předně, že k tomu, aby v obecnějším intervalu $\langle S, S+(2k+1) \rangle$, kde S a k jsou přirozená čísla, ležela druhá mocnina, stačí, aby platilo $S \leqq (k+1)^2$ (pokud totiž v $\langle S, S+(2k+1) \rangle$ neleží žádné z čísel $1^2, 2^2, \ldots, k^2$, je pak $k^2 < S \leqq (k+1)^2$, tudíž v daném intervalu leží číslo $(k+1)^2$). Při zřejmém označení tak v naší úloze stačí pro každé $n > 1$ dokázat nerovnost $p_1 + \ldots + p_n \leqq \frac{1}{4}(p_{n+1}+1)^2$ (podle předchozího tvrzení pro $k = \frac{1}{2}(p_{n+1}-1)$). Jelikož $p_1 - 1$, p_2, $p_3, \ldots, p_n$ jsou různá čísla z množiny lichých čísel $\{1, 3, 5, \ldots, p_{n+1}-2\}$ se součtem prvků $\frac{1}{4}(p_{n+1}-1)^2$, stačí dokázat, že platí $1 + \frac{1}{4}(p_{n+1}-1)^2 \leqq \frac{1}{4}(p_{n+1}+1)^2$. To je ale zřejmé, neboť celé číslo $\frac{1}{4}(p_{n+1}-1)^2$ je menší než celé číslo $\frac{1}{4}(p_{n+1}+1)^2$.]

D4. Na tabuli jsou napsána (ne nutně různá) prvočísla, jejichž součin je 105krát větší než jejich součet. Určete všechna napsaná prvočísla, pokud jich je a) pět, b) sedm. [70–A–I–1]

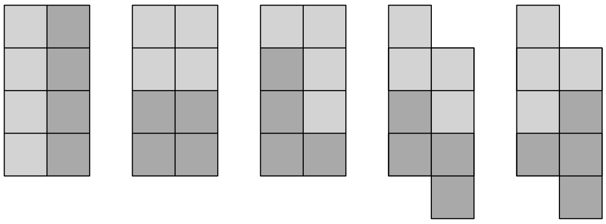
5. *Rozhodněte, zda existuje neprázdná podmnožina políček tabulky* 7×7 *s následující vlastností: Pro každé z vyobrazených* tetramin



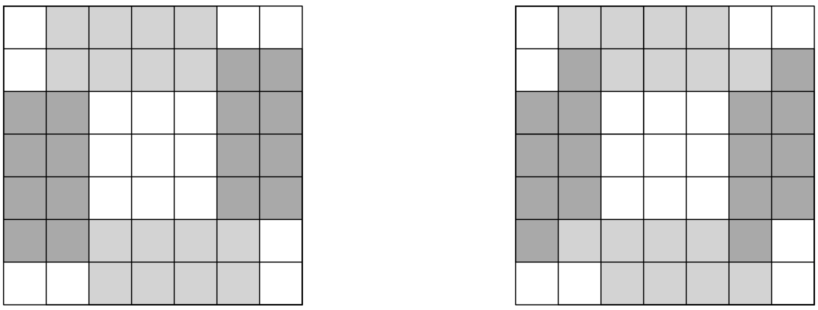
lze tuto podmnožinu vyplnit bez překrývání výhradně jeho kopiemi. Jednotlivé kopie můžeme libovolně otáčet a překlápět. (Michal Rolínek)

Řešení. Taková podmnožina políček existuje, najdeme totiž její konkrétní příklad.

Konstrukci příkladu a ověření jeho správnosti si zjednodušíme, když od pěti vyplňování tetraminy přejdeme ke dvěma vyplňováním *oktaminy*, které vidíte na obrázku – první oktamino ve třech kopiích, druhé oktamino ve dvou kopiích.* Takový přechod je možný, neboť každé z pěti oktamin je vyplněno dvěma kopiemi jiného z pěti tetramin ze zadání.



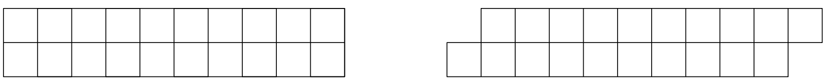
Neprázdnou podmnožinu políček, kterou lze vyplnit kopiemi každého ze dvou navržených oktamin, lze najít snáze. Její příklad i s oběma vyplněními vypadá následovně:



Tím je řešení úlohy hotovo.

Návodné a doplňující úlohy:

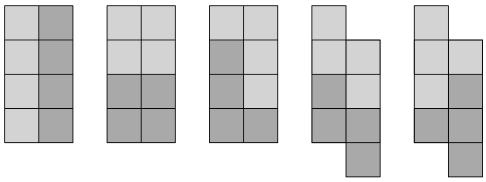
N1. Nalezněte neprázdnou podmnožinu políček tabulky 20×20, kterou lze vyplnit (beze zbytku a překrývání) kopiemi levého obrazce i kopiemi pravého obrazce.



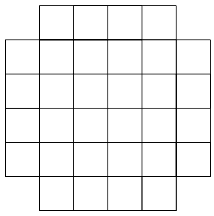
[Použijte každou dlaždici čtyřikrát „dokola“.]

* Zdůrazněme, že není předem jasné, zda takové zjednodušení úlohy dopadne „dobře“. Chybí nám důkaz tvrzení, že z existence pěti vyplnění tetraminy plyne existence dvou vyplnění oktaminy.

N2. Určete, kolik políček obsahuje nejmenší obrazec, který lze vyplnit a) jak tetraminy typu I, tak tetraminy typu O, jakož i tetraminy typu L, b) jak tetraminy typu S, tak tetraminy typu T. [8 políček pro obě úlohy. Každý vyhovující obrazec musí složen z alespoň dvou kopií každého ze zmíněných tetramin a mít tak alespoň 8 políček. Možné příklady obrazců s 8 políčky i s požadovanými vyplněními jsou na obrázku.]



D1. Rozhodněte, zda lze následující tabulku vyplnit tetraminy typu L.

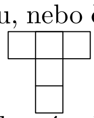


[Jde to. Dokonce lze bez přesahu vyplnit „polovinu“ tabulky, rozdělené její svislou (nebo vodorovnou) osou souměrnosti.]

D2. Rozhodněte, zda lze tabulku 10×10 vyplnit tetraminy typu T. [Nejde to. Obarvěte tabulku bílými a černými poli jako šachovnici. Pak každé tetramino T pokrývá lichý počet černých polí. Při vyplnění 25 tetraminy typu T by celkový počet pokrytých černých polí byl lichý.]

D3. Rozhodněte, zda lze tabulku 10×10 vyplnit tetraminy typu I. [Nejde to. Uvažte „hrubší“ šachovnicové obarvení, kdy jednobarevné čtverce mají velikost 2×2. Kolik černých polí pak pokryje jedno tetramino typu I, kolik by jich bylo pokryto při vyplnění jeho 25 kopiemi?]

D4. Na některé pole čtvercové šachovnice $n \times n$ ($n \geqq 2$) postavíme figurku a pak s ní táhneme střídavě „šikmo“ a „přímo“. „Šikmo“ znamená na pole, které má s předchozím společný právě jeden bod. „Přímo“ znamená na sousední pole, které má s předchozím společnou stranu. Určete všechna n, pro něž existuje výchozí pole a posloupnost tahů začínající „šikmo“ tak, že figurka projde celou šachovnici a na každém poli se octne právě jednou. [A–56–III–1]

D5. Nechť $n \geqq 3$ je přirozené číslo. Uvažujme čtverečkovaný papír o rozměrech $n \times n$, jehož jednotlivé čtverečky mohou mít buď bílou, nebo černou barvu. V každém kroku změníme barvy pěti čtverečků, které tvoří obrazec  v libovolném natočení. Na počátku jsou všechny čtverečky bílé. Rozhodněte, pro která n lze po konečném počtu kroků dosáhnout toho, že všechny čtverečky budou černé. [A–72–III–6]

6. *Pro reálná čísla a, b, c, d z intervalu $\langle 1, 2\rangle$ platí $(a+c)(b+d) = 8$. Dokažte, že*

$$\frac{1}{a^2+b^2-1} + \frac{1}{b^2+c^2-1} + \frac{1}{c^2+d^2-1} + \frac{1}{d^2+a^2-1} \geqq 1,$$

a určete, kdy nastane rovnost. (Zdeněk Pezlar)

ŘEŠENÍ. Ve všech částech textu budeme předpokládat, že čísla a, b, c, d splňují podmínky uvedené v zadání.

V první části řešení dokážeme, že zadaná nerovnost platí.

Předně si povšimneme, že jmenovatelé zastoupených zlomků jsou kladná čísla, neboť čísla a, b, c, d jsou alespoň 1. Jelikož navíc leží v intervalu délky 1, pro každá dvě z nich, kupříkladu pro čísla a a b, platí $(a-b)^2 \leqq 1$ neboli $a^2+b^2-1 \leqq 2ab$. Nyní z nerovností $0 < a^2+b^2-1 \leqq 2ab$ plyne, že pro první zlomek ze zadání platí

$$\frac{1}{a^2+b^2-1} \geqq \frac{1}{2ab}. \tag{1}$$

Sečteme-li tuto nerovnost s jejími obdobami pro další tři zadané zlomky, obdržíme

$$\frac{1}{a^2+b^2-1} + \frac{1}{b^2+c^2-1} + \frac{1}{c^2+d^2-1} + \frac{1}{d^2+a^2-1} \geqq \frac{1}{2ab} + \frac{1}{2bc} + \frac{1}{2cd} + \frac{1}{2da}. \tag{2}$$

Nerovnost ze zadání tak bude dokázána, ověříme-li jednodušší nerovnost

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} + \frac{1}{da} \geqq 2. \tag{3}$$

Využijeme k tomu známou nerovnost pro *součin dvou součtů*, totiž součet několika kladných čísel a součet jejich převrácených hodnot.* V případě 4 čísel má tato nerovnost tvar, který rovnou zapíšeme pro čísla ab, bc, cd, da:

$$(ab+bc+cd+da)\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} + \frac{1}{da}\right) \geqq 4^2. \tag{4}$$

Kýžená nerovnost (3) je již snadným důsledkem (4) a předpokladu $(a+c)(b+d) = 8$ ze zadání:

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{da} \geqq \frac{4^2}{ab+bc+cd+da} = \frac{16}{(a+c)(b+d)} = \frac{16}{8} = 2.$$

V druhé části řešení určíme, kdy v dokázané nerovnosti nastane rovnost. Tehdy je nutné, aby nastala rovnost v (2), tedy i rovnosti v nerovnosti $(a-b)^2 \leqq 1$ a třech dalších jejích obdobách. Hledané čtveřice (a,b,c,d) tak nutně splňují rovnosti

$$|a-b| = |b-c| = |c-d| = |d-a| = 1. \tag{5}$$

Pokud platí $a > b$, snadno už takovou čtveřici čísel z intervalu $\langle 1, 2\rangle$ jednoznačně určíme jako $(2,1,2,1)$. V opačném případě $b \geqq a$ obdobně dospějeme k jediné čtveřici $(1,2,1,2)$. Dosazením každé ze dvou určených čtveřic do původní nerovnosti zjistíme, že rovnost opravdu splňují, neboť každý ze čtyř zlomků na levé straně je po dosazení roven $1/4$.

Závěr. Rovnost nastane pouze pro čtveřice (a,b,c,d) rovné $(2,1,2,1)$ a $(1,2,1,2)$.

* Tato nerovnost, uvedená níže v úloze N3, je ekvivalentní s nerovností mezi *aritmetickým* a *harmonickým* průměrem několika kladných čísel, o které pojednává úloha N4.

Komentář. Vysvětleme poněkud umělý obrat z úvodu podaného řešení. Dokazovanou nerovnost lze jen stěží nějak výhodně algebraicky upravit. Proto jsme se rozhodli odhadnout zdola jednotlivé zlomky, které se sčítají na levé straně. Nejjednodušší by bylo, kdyby platily čtyři odhady typu

$$\frac{1}{a^2+b^2-1} \geqq \frac{1}{4}.$$

Potřebovali bychom tak nerovnost $a^2+b^2 \leqq 5$, jejíž platnost pro naše čísla a, b (z intervalu $\langle 1,2\rangle$) ovšem zaručenu nemáme.* Proto jsme úvodem odvodili dolní odhad (1) s nekonstantní pravou stranou, závislou na součinu čísel a a b. To se ukázalo výhodné i proto, že součin ab je jedním ze čtyř sčítanců, které dostaneme roznásobením součinu $(a+c)(b+d)$ se zadanou hodnotou 8. Výhoda se pak projevila po využití užitečné nerovnosti (4) pro *součin dvou součtů* (pracovní termín upřesněný v textu řešení), která v obecné podobě z úlohy N3 stojí za zapamatování. Dodejme, že tuto nerovnost je možné s úspěchem uplatnit také rovnou k součtu na levé straně původní nerovnosti (jiné řešení níže).

Poznamenejme ještě, že v druhé části řešení jsme se zabývali pouze podmínkou rovnosti v (2). Ta je ve skutečnosti ekvivalentní s rovnostmi (5). Závěrečnou zkoušku dosazením jsme i přesto museli provést, neboť jsme neposoudili rovnost ve druhé užité nerovnosti (4). Ta podle úlohy N3 nastane, právě když platí $ab = bc = cd = da$ neboli $a = c$ a $b = d$. Tyto dvě rovnosti ovšem obě dvojice nalezené podle (5) splňují, tudíž nutnost zkoušky při odvození podmínek $a = c$ a $b = d$ odpadá.

Jiné řešení. Označme L levou stranu dokazované nerovnosti. Stejně jako v prvním řešení zdůvodníme, že L je součtem převrácených hodnot čtyř kladných čísel, jejichž součet je přitom zřejmě roven $2(a^2+b^2+c^2+d^2-2)$. Podle nerovnosti pro *součin dvou součtů*, o které jsme se zmínili v prvním řešení, tak platí

$$2(a^2+b^2+c^2+d^2-2)\cdot L \geqq 4^2 = 16, \quad \text{odkud} \quad L \geqq \frac{8}{a^2+b^2+c^2+d^2-2}.$$

Kýžená nerovnost $L \geqq 1$ tak bude dokázána, ověříme-li, že platí

$$a^2+b^2+c^2+d^2-2 \leqq 8. \tag{6}$$

K tomu každé z čísel -2 a 8 převedeme na opačnou stranu nerovnosti a druhé z nich zaměníme součinem $(a+c)(b+d)$. Zbude nám tak ověřit nerovnost

$$a^2+b^2+c^2+d^2-(a+c)(b+d) \leqq 2.$$

Její levá strana je ovšem zřejmě rovna součtu

$$\frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2+\frac{1}{2}(c-d)^2+\frac{1}{2}(d-a)^2, \tag{7}$$

který skutečně nepřevyšuje 2, neboť každá ze čtyř zastoupených druhých mocnin nepřevyšuje 1 (díky tomu, že čísla a, b, c, d leží v intervalu délky 1). Tím je slíbené ověření hotovo.

Pokud v dokázané nerovnosti nastane rovnost, musí se každá z druhých mocnin zastoupených v (7) rovnat 1, tj. musí platit rovnosti (5) z prvního řešení. Proto stejně jako tam určíme dvě čtveřice $(2,1,2,1)$ a $(1,2,1,2)$ a ověříme, že pro ně rovnost skutečně nastává.

* Neovlivní to ani podmínka $(a+c)(b+d) = 8$.

Poznámka. Naznačme malou obměnu právě podaného řešení, při které dokazovanou nerovnost pro součet čtyř zlomků dostaneme sečtením dvou odhadů

$$\frac{1}{a^2+b^2-1}+\frac{1}{c^2+d^2-1}\geqq\frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{b^2+c^2-1}+\frac{1}{d^2+a^2-1}\geqq\frac{1}{2}.$$

Tyto dva odhady dokážeme současně. Jejich levé strany, které označíme $L_{1,2}$, jsou totiž součty převrácených hodnot dvou kladných čísel, přitom součet těchto dvou čísel je v obou případech roven $a^2+b^2+c^2+d^2-2$. Podle nerovnosti z úlohy N3, tentokrát užité pro $n=2$, tedy platí

$$\bigl(a^2+b^2+c^2+d^2-2\bigr)\cdot L_{1,2}\geqq 2^2=4.$$

Oba kýžené odhady $L_{1,2}\geqq\frac{1}{2}$ tak opět plynou z nerovnosti (6), kterou jsme se zabývali v předchozím řešení.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro libovolná reálná čísla x, y dokažte
a) $x^2+y^2+z^2\geqq 2(x+y)z-2xy$, b) $2+x^2\bigl(1+y^2\bigr)\geqq 2x(1+y)$.
[Nerovnost z a) upravte na $(x+y-z)^2\geqq 0$, z b) na $(xy-1)^2+(x-1)^2\geqq 0$.]

N2. Reálná čísla a, b leží v intervalu $\langle 1,2\rangle$. Ukažte, že platí následující nerovnosti:
a) $a^2+b^2\leqq 1+2ab$, b) $a^2+b^2\leqq\frac{5}{2}ab$,
c) $2\leqq a/b+b/a\leqq\frac{5}{2}$, d) $a^2+2b^2\leqq(2a+1)b+3$.
[Nerovnost z a) upravte na $(a-b)^2\leqq 1$, nerovnost z b) na $(2a-b)\cdot(2b-a)\geqq 0$. Levá nerovnost z c) platí pro libovolná $a,b>0$ a lze ji dokázat například úpravou na $(a-b)^2\geqq 0$ (nebo užitím A-G nerovnosti pro dvě čísla a/b a b/a). Pravá nerovnost z c) plyne z b). Nerovnost z d) upravte na $(a-b)^2+(b-\frac{1}{2})^2\leqq\frac{13}{4}$ a využijte toho že $|a-b|\leqq 1$ a $0<b-\frac{1}{2}\leqq\frac{3}{2}$.]

N3. Dokažte, že pro libovolnou n-tici kladných reálných čísel $a_1,a_2,\ldots,a_n$ platí

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\cdot(1/a_1+1/a_2+\ldots+1/a_n)\geqq n^2.$$

Kdy nastane rovnost? [Po roznásobení dostanete n jedniček a $n(n-1)/2$ dvojic zlomků a_i/a_j a a_j/a_i (kde $1\leqq i<j\leqq n$), přitom součet každých dvou takových zlomků je aspoň 2 podle řešení části c) z úlohy N2. Rovnost nastane, právě když platí $a_i/a_j=a_j/a_i$ kdykoli $i\neq j$, tedy právě když všechna čísla a_i jsou stejná.]

N4. Pro libovolnou n-tici kladných reálných čísla $a_1,a_2,\ldots,a_n$ definujeme jejich aritmetický průměr $\mathcal{A}_n$ a harmonický průměr $\mathcal{H}_n$ vzorci

$$\mathcal{A}_n=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\quad\text{a}\quad\mathcal{H}_n=\frac{n}{1/a_1+1/a_2+\ldots+1/a_n}.$$

Dokažte, že vždy platí $\mathcal{A}_n\geqq\mathcal{H}_n$. [Upravte na nerovnost z N3.]

D1. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqq\frac{3}{2}.$$

[Přičtěte ke každému zlomku 1 a užijte N3 pro trojici $b+c$, $c+a$, $a+b$.]

D2. Pro libovolná kladná reálná čísla x, y, z dokažte nerovnost

$$(x+y+z)\Bigl(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\Bigr)\leqq m^2,\quad\text{kde } m=\min\Bigl(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x},\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\Bigr).$$

Zjistěte rovněž, kdy v dokázané nerovnosti nastane rovnost. [63–A–I–2]

D3. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ platí

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab}\leqq 2.$$

[S ohledem na symetrii jistě můžeme předpokládat, že $a \geqq \max(b, c)$. První zlomek je zřejmě nejvýše 1. Druhý zlomek je nejvýše $b/(a+c)$, neboť z nerovnosti $(1-a)(1-c) \geqq 0$ plyne $1 + ca \geqq a + c$. Podobně třetí zlomek je nejvýše $c/(a + b)$. Stačí tak dokázat, že součet $b/(a + c) + c/(a + b)$ je nejvýše 1. To však díky předpokladu $a \geqq \max(b, c)$ platí, neboť pak $b/(a + c) \leqq b/(b + c)$ a $c/(a + b) \leqq c/(b + c)$.]

D4. Pro reálná čísla a, b platí $9a^2 + 8ab + 7b^2 \leqq 6$. Dokažte, že $7a + 5b + 12ab \leqq 9$. [Všimněme si, že v obou uvedených nerovnostech nastává rovnost pro $a = b = \frac{1}{2}$. Uplatněme proto odhad $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \geqq 0$ ve tvaru $a \leqq a^2 + \frac{1}{4}$ a jeho obdobu $b \leqq b^2 + \frac{1}{4}$. Dostaneme $7a + 5b + 12ab \leqq 7\left(a^2 + \frac{1}{4}\right) + 5\left(b^2 + \frac{1}{4}\right) + 12ab$, přitom výraz napravo je roven $\left(9a^2 + 8ab + 7b^2\right) - 2(a - b)^2 + 3$.]

D5. Pro kladná reálná čísla a, b, c, d platí $abcd = 4$ a $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 10$. Určete největší možnou hodnotu výrazu $ab + bc + cd + da$. [https://skmo.sk/dokument.php?id=994#page=9]

D6. Najděte nejmenší kladné reálné číslo t s následující vlastností: Kdykoliv reálná čísla a, b, c, d splňují rovnosti $a+b+c+d = 6$ a $a^2+b^2+c^2+d^2 = 10$, lze z těchto čísel vybrat dvě, jejichž rozdíl má absolutní hodnotu nejvýše 4. [https://iksko.org/files/1/vzorak1.pdf#page=1]