73. ročník Matematické olympiády (2023/2024)

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii B

V první části textu pod zadáním každé ze šesti soutěžních úloh najdete zadání návodných a doplňujících úloh. Tytéž úlohy i s řešeními (resp. odpověďmi a nástiny řešení či internetovými odkazy na ně) najdete ve druhé části textu.

1. *Kolik neprázdných podmnožin množiny* $\{0, 1, \ldots, 9\}$ *má součet prvků dělitelný třemi?*

(Eliška Macáková)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro každé přirozené číslo n dokažte: Počet všech podmnožin n-prvkové množiny je roven 2^n.

N2. Kolik neprázdných podmnožin množiny $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ má sudý součet prvků?

N3. Kolika způsoby lze z množiny $\{1, 2, \ldots, 9\}$ vybrat dvě čísla se součtem dělitelným třemi?

D1. Označme M počet všech možných vyplnění tabulky 3×3 navzájem různými přirozenými čísly od 1 do 9. Dále označme L počet těch vyplnění, kde jsou navíc součty všech čísel v každém řádku i sloupci lichá čísla. Určete poměr $L : M$.

D2. Označme M počet všech možných vyplnění tabulky 3×3 navzájem různými přirozenými čísly od 1 do 9. Dále označme D počet těch vyplnění, kde je navíc *součin* čísel v některém řádku nebo sloupci násobkem deseti. Určete poměr $D : M$.

D3. Kolik 33místných čísel dělitelných 3 neobsahuje ve svém zápisu číslici 3? Výsledek zapište ve tvaru součinu mocnin prvočísel.

D4. Určete počet neprázdných podmnožin množiny $\{0, 1, \ldots, 2n - 1\}$ se sudým součtem prvků, kde n je dané přirozené číslo. (Zobecnění úlohy N2.)

D5. Řešte toto zobecnění soutěžní úlohy: Pro každé celé k označme $p(k)$ počet těch podmnožin množiny $\{0, 1, \ldots, 3k\}$, které mají součet prvků dělitelný třemi (započítáme mezi ně i prázdnou množinu). Dokažte vzorec $p(k) = \frac{1}{3}\left(2^{2k}+2\right)\cdot 2^{k+1}$. *Návod*: Odvoďte nejprve, že pro každé k platí $p(k+1) = 2\left(2^{3k+1} + p(k)\right)$, a pak využijte matematickou indukci.

Doplňující literatura:

K připomenutí pravidel o dělitelnosti doporučujeme brožurku Antonína Vrby *O dělitelnosti čísel celých* edice *Škola mladých matematiků*. Práci se zbytky při dělení v oboru celých celých usnadňují zápisy, které mají stejný název jako další brožurka Aloise Apfelbecka *Kongruence*. Najdete v ní nejen jejich zavedení, ale i zajímavé příklady uplatnění. Pravidla k určování různých „velkých" počtů výběrů možností nebo počtů určitých typů skupin prvků najdete v brožurce Antonína Vrby *Kombinatorika*. Konečně v brožurce Rudolfa Výborného *Matematická indukce* najdete úvodní poučení o tomto významném matematickém principu a následné rozmanité příklady jeho využití.

2. *Pro reálná čísla a, b, c platí*

$$\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}.$$

Určete všechny možné hodnoty výrazu

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3}.$$

(Michal Rolínek)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro reálná platí $a/(b+1)=b/(a+1)$. Dokažte, že čísla a, b jsou stejná nebo se jejich součet rovná -1.

N2. Pro reálná čísla a, b, c platí $a/b=b/c=c/a$. Určete všechny možné hodnoty součtu $a/(b+c)+b/(c+a)+c/(a+b)$.

D1. Určete, jakých hodnot může nabývat výraz

$$\frac{a+bc}{a+b}+\frac{b+ca}{b+c}+\frac{c+ab}{c+a},$$

jsou-li a, b, c kladná reálná čísla se součtem 1.

D2. Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla, pro něž platí $ab+bc+ca=1$. Určete, jakých hodnot nabývá výraz

$$\frac{a(b^2+1)}{a+b}+\frac{b(c^2+1)}{b+c}+\frac{c(a^2+1)}{c+a}.$$

D3. Nechť x, y, z jsou kladná reálná čísla, jejichž součin je roven 1. Dokažte, že platí rovnost

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=1.$$

D4. Pro reálná čísla x, y, z platí

$$|x+y|=1-z,\quad |y+z|=1-x,\quad |z+x|=1-y.$$

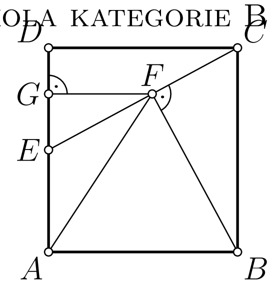
Zjistěte, jakých všech hodnot může nabývat součet $x+y+z$. Pro každý vyhovující součet uveďte příklad odpovídajících čísel x, y, z.

D5. Pro reálná čísla a, b, c jsou oba součty $a+b+c$ a $a^3+b^3+c^3$ rovny nule. Najděte všechny možné hodnoty součinu abc.

D6. Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\frac{1}{x+y}+z=1,\quad \frac{1}{y+z}+x=1,\quad \frac{1}{z+x}+y=1.$$

D7. Pro nenulová reálná čísla a, b, c platí $a^2-b^2=bc$ a $b^2-c^2=ca$. Ukažte, že pak také $a^2-c^2=ab$.



3. *Nechť E je střed strany AD pravoúhelníku $ABCD$. Předpokládejme, že pata F kolmice z vrcholu B k přímce CE leží uvnitř úsečky CE a označme G patu kolmice z bodu F ke straně AD. Dokažte, že přímka CE půlí úhel AFG.* (Jaroslav Švrček)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

Úvodem připomeneme, že konvexní čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový, právě když platí kterákoli z podmínek:

- Součet některých dvou jeho protějších vnitřních úhlů je 180°, například těch u vrcholů B a D: $|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDA| = 180°$. (Tehdy k tětivovosti jakéhokoli čtyřúhelníku $ABCD$ stačí, aby body B a D ležely uvnitř opačných polorovin s hraniční přímkou AC.)
- Úhly „nad" některou jeho stranou jsou shodné, například nad stranou AB jde o úhly s vrcholy C a D: $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|$. (Tehdy k tětivovosti jakéhokoli čtyřúhelníku $ABCD$ či $ABDC$ stačí, aby body C a D ležely uvnitř stejné poloroviny s hraniční přímkou AB.)

Při řešení úloh často nejprve užitím jedné z těchto podmínek tětivovost některého konvexního čtyřúhelníku dokážeme a pak vhodně využijeme platnost druhé podmínky.

N1. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí rovnosti $|\sphericalangle BAD| = 42°$, $|\sphericalangle ABC| = 79°$, $|\sphericalangle DCB| = 138°$ a $|\sphericalangle BDC| = 25°$. Určete $|\sphericalangle ACB|$.

N2. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s výškami AD a BE.* Dokažte, že střed kružnice opsané trojúhelníku CDE leží na výšce trojúhelníku ABC z vrcholu C.

N3. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s výškami AD, BE a CF. Dokažte, že tyto výšky půlí vnitřní úhly trojúhelníku DEF.

D1. Jsou dány dva tětivové čtyřúhelníky $ABXY$ a $CDYX$, přitom jejich společné vrcholy X a Y leží po řadě na úsečkách AC a BD. Dokažte, že platí $AB \parallel CD$.

D2. Nechť D je vnitřní bod přepony AB pravoúhlého trojúhelníku ABC. Označme X a Y středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům ADC a CDB. Dokažte, že body C, D, X a Y leží na jedné kružnici.

D3. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Tečny v bodech A, B ke kružnici tomuto trojúhelníku opsané se protínají v bodě T. Předpokládejme, že přímka rovnoběžná se stranou AC, která prochází bodem T, protíná stranu BC v bodě D. Dokažte, že $|AD| = |CD|$.

D4. Nechť AC je průměr kružnice opsané tětivovému čtyřúhelníku $ABCD$. Předpokládejme, že na polopřímkách opačných k polopřímkám AD a DC existují po řadě body $A' \neq A$ a $C' \neq D$ takové, že platí $|AB| = |A'B|$ a $|BC| = |BC'|$. Dokažte tvrzení:

a) Body A', B, C' a D leží na téže kružnici k.

b) Je-li O střed kružnice k a O_A, O_C jsou po řadě středy kružnic opsaných trojúhelníkům $AA'B$, $CC'B$, pak platí $OO_A \perp OO_C$.

D5. Na stranách AB a BC daného trojúhelníku ABC leží po řadě takové body D a E, že $|BD| = |DC| = |CA|$ a $|EC| = |ED|$. Dokažte, že $|AE| = |BE|$.

* Jako obvykle *výškou trojúhelníku* rozumíme *úsečku*, kterou popisujeme jejími krajními body.

D6. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C. Nechť D je libovolný vnitřní bod odvěsny AC a p kolmice z bodu D k přeponě AB. Označme $E \neq D$ bod přímky p takový, že body A, B, D, E leží na kružnici. Označme ještě F průsečík přímek p a BC. Dokažte, že $|AE| = |AF|$.

D7. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB a bod P uvnitř jeho výšky z vrcholu C. Přímka AP protne kružnici opsanou trojúhelníku ABC v bodě Q různém od A. Rovnoběžka se základnou AB vedená bodem P protne rameno BC v bodě R. Dokažte, že polopřímka QR je osou úhlu AQB.

Doplňující literatura:

K tématu soutěžní úlohy (úhly, které spojujeme s kružnicemi, tětivové čtyřúhelníky) doporučujeme brožurku Stanislava Horáka *Kružnice*. Najdete v ní také důkazy všech poznatků, které jsme připomněli před uvedením úlohy N1.

4. *Rozhodněte, zda existuje pětice přirozených čísel*

(i) a, a, a, a, b $(a \neq b)$,

(ii) a, a, b, b, c $(a \neq b \neq c \neq a)$,

v níž je každé z těchto čísel dělitelem součtu každých tří ze zbylých čtyř čísel.

(Jaroslav Zhouf)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Pro celá čísla n, a, b platí $n \mid a$ a $n \mid b$. Dokažte, že pak pro libovolná celá čísla k, l platí rovněž $n \mid ka + lb$ (speciálně například $n \mid a + b$ a $n \mid a - b$).

N2. Pro která přirozená čísla n je zaručeno, že celá čísla u, v splňující obě podmínky $n \mid u + v$ a $n \mid u - v$ jsou sama dělitelná číslem n?

N3. Dokažte, že pokud pro přirozená čísla a a b platí $a \mid b$ a $b \mid a$, pak $a = b$.

N4. Dokažte, že pokud pro různá přirozená čísla u a v platí $u \mid v$, pak $2u \leqq v$.

D1. Pro přirozená čísla a, b platí $a \mid 9b$ a $b \mid 9a$. Určete všechny možné hodnoty podílu a/b.

D2. Na školní zahradě hraje skupina žáků hru zvanou molekuly. Učitel jim nejprve uložil, aby se rozdělili do trojic. Jeden žák přebyl, a tak z další hry vypadl. Zbylí žáci se pak měli rozdělit do čtveřic. Opět jeden žák přebyl a vypadl. Poté se zbylí žáci měli rozdělit do pětic, zase jeden žák přebyl a vypadl. Učitel nyní ukládá, aby se zbylí žáci rozdělili do šestic. Dokažte, že opět jeden žák přebyde.

D3. Určete všechny dvojice (m, n) kladných celých čísel, pro něž je číslo $4(mn + 1)$ dělitelné číslem $(m + n)^2$.

D4. Určete všechna kladná celá čísla m, n taková, že n je dělitelem $2m - 1$ a současně m je dělitelem $2n - 1$.

D5. Najděte všechny trojice navzájem různých prvočísel p, q, r splňujících tři podmínky $p \mid q + r$, $q \mid r + 2p$ a $r \mid p + 3q$.

Doplňující literatura:

K soutěžní úloze 4 doporučujeme brožurky Františka Veselého *O dělitelnosti čísel celých* a Aloise Apfelbecka *Kongruence* jako k soutěžní úloze 1.

5. *V pravoúhlém trojúhelníku je poměr poloměru kružnice vepsané ku poloměru kružnice opsané* $2:5$. *Dokažte, že délka jedné z jeho stran je aritmetickým průměrem délek zbylých dvou stran.* (Mária Dományová)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Zdůvodněte, že poloměr kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku je polovinou délky jeho přepony.

N2. Dokažte, že v pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami délek a, b a přeponou délky c platí pro poloměr r kružnice jemu vepsané vzorec $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$.

N3. Pravoúhlý trojúhelník o odvěsnami délek a, b a přeponou délky c splňuje podmínku $3a + 4b = 5c$. Určete všechny možné hodnoty poměru $a : c$.

D1. Pro poloměr r kružnice vepsané obecnému trojúhelníku dokažte vzorec $r = S/s$, kde S je obsah tohoto trojúhelníku a s je polovina jeho obvodu.

D2. Odvoďte vzorec $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$ z úlohy N1 užitím výsledku úlohy D1.

D3. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Dokažte, že velikost jeho výšky CD je rovna součtu poloměrů kružnic vepsaných trojúhelníkům ABC, CAD a CBD.

D4. Pravoúhlý trojúhelník má celočíselné délky stran a obvod 11 990. Navíc víme, že jedna jeho odvěsna má prvočíselnou délku. Určete ji.

D5. Pravoúhlý trojúhelník má celočíselné délky stran. Jeho obvod je druhá mocnina přirozeného čísla. Také víme, že jedna jeho odvěsna má délku rovnou druhé mocnině prvočísla. Určete všechny možné hodnoty této délky.

D6. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB a odvěsnami délek $|AC| = 4$ a $|BC| = 3$ leží navzájem se dotýkající kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ tak, že k_1 se dotýká stran AB a AC a k_2 se dotýká stran AB a BC. Určete poloměry r_1 a r_2, jestliže platí $4r_1 = 9r_2$.

6. *Rozhodněte, zda lze čtvercovou tabulku* 4×4 *vyplnit navzájem různými přirozenými čísly od* 1 *do* 16 *tak, že v každém řádku i každém sloupci existuje číslo, jehož sedminásobek je součtem zbylých tří čísel.* (Jaromír Šimša)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Rozhodněte, zda lze čtvercovou tabulku 3×3 vyplnit navzájem různými přirozenými čísly od 1 do 9 tak, aby v každém řádku existovalo číslo, které se rovná součtu zbylých dvou čísel.

N2. Rozhodněte, zda lze čtvercovou tabulku 3×3 vyplnit navzájem různými přirozenými čísly od 1 do 9 tak, aby v každém řádku existovalo číslo, jehož čtyřnásobek se rovná součtu zbylých dvou čísel.

N3. Tabulka 4×4 je vyplněna různými celými čísly od 1 do 16. Jisté číslo s v této tabulce má tu vlastnost, že jeho čtyřnásobek je roven jak součtu ostatních tří čísel z jeho řádku, tak součtu ostatních tří čísel z jeho sloupce. Určete největší možné takové s.

D1. Tabulka 10×10 je vyplněna čísly 1 a -1 tak, že součet čísel v každém řádku i sloupci je dělitelný třemi. Určete největší možný součet čísel v tabulce a ukažte, že větší být nemůže. Uveďte rovněž příklad tabulky s určeným největším součtem.

D2. Na školní zahradě hraje skupina žáků hru zvanou molekuly. Učitel jim nejprve uložil, aby se rozdělili do trojic. Jeden žák přebyl, a tak z další hry vypadl. Zbylí žáci se pak měli rozdělit do čtveřic. Opět jeden žák přebyl a vypadl. Poté se zbylí žáci měli rozdělit do pětic, zase jeden žák přebyl a vypadl. Učitel nyní ukládá, aby se zbylí žáci rozdělili do šestic. Dokažte, že opět jeden žák přebyde.

D3. Tabulka 10×10 je vyplněna čísly 1 a -1 tak, že součet čísel v každém řádku až na jeden je roven 0 a součet čísel v každém sloupci až na jeden je roven stejnému číslu s. Určete největší možnou hodnotu s a ukažte, že větší být nemůže. Uveďte rovněž příklad tabulky s určenou největší hodnotou s.

D4. Tabulka 10×10 je vyplněna čísly -4, 3 a 10 tak, že součet čísel v každém řádku až na jeden je nejvýš 0 a součet čísel v každém sloupci až na jeden je nejvýš 0. Určete největší možný součet čísel v tabulce.

D5. V tabulce $n \times n$, kde $n \geqq 2$, jsou po řádcích zapsána postupně celá čísla od 1 do n^2 (v prvním řádku po řadě čísla od 1 do n, ve druhém čísla od $n+1$ do $2n$ atd.) V jednom kroku můžeme vybrat libovolná dvě čísla na sousedních políčkách (tj. na takových, která mají společnou stranu) a – pokud je jejich aritmetický průměr celé číslo – tímto průměrem obě čísla nahradíme. Pro která n je možné po konečném počtu kroků dostat tabulku, ve které jsou všechna čísla stejná?

D6. Pro která přirozená čísla n lze do tabulky $n \times n$ vepsat všechna celá čísla od 1 do n^2 tak, aby aritmetický průměr čísel v každém řádku i sloupci tabulky byl celým číslem?

Na následujících stranách najdete stejné návodné a doplňující úlohy ještě jednou, zato doplněné o výsledky s nástiny řešení či o internetové odkazy na ně.

1. *Kolik neprázdných podmnožin množiny* $\{0, 1, \dots, 9\}$ *má součet prvků dělitelný třemi?* (Eliška Macáková)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro každé přirozené číslo n dokažte: Počet všech podmnožin n-prvkové množiny je roven 2^n. [Představme si, že libovolnou podmnožinu postupně sestrojujeme: Pro každý prvek se rozhodujeme, zda ho vybereme či nikoli. Jelikož těchto výběrů je n a jsou navzájem nezávislé, je různých výsledků konstrukce právě 2^n.]

N2. Kolik neprázdných podmnožin množiny $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ má sudý součet prvků? [31. V dané množině jsou tři sudá a tři lichá čísla. Uvědomme si, že součet prvků její podmnožiny je sudý, právě když je v ní sudý počet lichých čísel – tedy buď žádné liché číslo (1 možnost), nebo 2 lichá čísla (ta lze vybrat 3 způsoby). Počet všech vyhovujících výběrů lichých čísel je tak roven 4. Každý z nich pak lze doplnit o některá (případně i žádné) ze tří sudých čísel právě $2^3 = 8$ způsoby. Od výsledku $4 \cdot 8 = 32$ je třeba odečíst 1, neboť jsme započítali i podmnožinu složenou z 0 sudých a 0 lichých čísel, tedy prázdnou podmnožinu.]

N3. Kolika způsoby lze z množiny $\{1, 2, \dots, 9\}$ vybrat dvě čísla se součtem dělitelným třemi? [12 způsobů. Podle zbytků při dělení třemi rozdělíme 9 zadaných čísel do tří množin $A_0 = \{1, 4, 7\}$, $A_1 = \{2, 5, 8\}$ a $A_2 = \{3, 6, 9\}$. Dvě z těchto čísel mají součet dělitelný třemi, právě když nastane jeden ze dvou případů: buď jedno číslo je z A_1 a druhé z A_2, nebo jsou obě čísla z A_0. Pro výběr dvou vyhovujících čísel máme v prvním případě $3 \cdot 3 = 9$ možností, v druhém případě 3 možnosti.]

D1. Označme M počet všech možných vyplnění tabulky 3×3 navzájem různými přirozenými čísly od 1 do 9. Dále označme L počet těch vyplnění, kde jsou navíc součty všech čísel v každém řádku i sloupci lichá čísla. Určete poměr $L : M$. [72–B–I–2]

D2. Označme M počet všech možných vyplnění tabulky 3×3 navzájem různými přirozenými čísly od 1 do 9. Dále označme D počet těch vyplnění, kde je navíc *součin* čísel v některém řádku nebo sloupci násobkem deseti. Určete poměr $D : M$. [72–B–S–1]

D3. Kolik 33místných čísel dělitelných 3 neobsahuje ve svém zápisu číslici 3? Výsledek zapište ve tvaru součinu mocnin prvočísel. [72–B–II–4]

D4. Určete počet neprázdných podmnožin množiny $\{0, 1, \dots, 2n - 1\}$ se sudým součtem prvků, kde n je dané přirozené číslo. (Zobecnění úlohy N2.) [$2^{2n-1} - 1$. V dané množině je n sudých a a n lichých čísel. Hledáme počet podmnožin se sudým počtem lichých čísel. Ukážeme nejprve, že počet způsobů, jakými lze z n lichých čísel vybrat sudý počet zástupců, je roven 2^{n-1}. K tomu stačí dokázat, že mezi všemi 2^n podmnožinami dané n-prvkové množiny je těch se sudým počtem prvků stejně jako těch s lichým počtem prvků, neboť oba počty se pak rovnají číslu $2^n : 2 = 2^{n-1}$. K důkazu zvolíme pevně jeden prvek a z dané n-prvkové množiny a všechny její podmnožiny rozdělíme na dvě skupiny podle toho, zda prvek a obsahují či nikoliv. Zástupce těchto dvou skupin lze úplně spárovat: každou množinu M bez prvku a dáme do páru s množinou $M \cup \{a\}$. Protože v každém páru je zřejmě jedna množina se sudým, a jedna s lichým počtem prvků, je důkaz hotov. K dokončení řešení uvážíme, že každý z 2^{n-1} vyhovujících výběrů lichých čísel lze doplnit o některá (případně žádné) z n sudých čísel právě 2^n způsoby. Od výsledku $2^{n-1} \cdot 2^n$ je třeba odečíst 1, neboť jsme započítali i podmnožinu složenou z 0 sudých a 0 lichých čísel, tedy prázdnou podmnožinu.]

D5. Řešte toto zobecnění soutěžní úlohy: Pro každé celé k označme $p(k)$ počet těch podmnožin množiny $\{0, 1, \ldots, 3k\}$, které mají součet prvků dělitelný třemi (započítáme mezi ně i prázdnou množinu). Dokažte vzorec $p(k) = \frac{1}{3}\big(2^{2k}+2\big)\cdot 2^{k+1}$. *Návod*: Odvoďte nejprve, že pro každé k platí $p(k+1) = 2\big(2^{3k+1} + p(k)\big)$, a pak využijte matematickou indukci. [Úplné řešení najdete v celém dokumentu k domácímu kolu, až bude po jeho skončení zveřejněn na internetových stránkách MO.]

2. *Pro reálná čísla a, b, c platí*

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}.$$

Určete všechny možné hodnoty výrazu

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3}.$$

(Michal Rolínek)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Pro reálná platí $a/(b+1) = b/(a+1)$. Dokažte, že čísla a, b jsou stejná nebo se jejich součet rovná -1. [Zadanou rovnost upravíme na $a^2 + a = b^2 + b$, dále na $a^2 - b^2 = b - a$ a konečně užitím rozkladu $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ na $(a-b)(a+b+1) = 0$. Odtud už plyne tvrzení.]

N2. Pro reálná čísla a, b, c platí $a/b = b/c = c/a$. Určete všechny možné hodnoty součtu $a/(b+c)+b/(c+a)+c/(a+b)$. [3/2. Čísla a, b, c jsou nenulová díky existenci podílů a/b, b/c, c/a, jejichž společnou hodnotu označíme k. Vynásobením rovností $k = a/b$, $k = b/c$, $k = c/a$ dostaneme $k^3 = 1$, odkud plyne $k = 1$ (je možné odvolat se na graf funkce $y = x^3$, nebo využít rozklad $k^3-1 = (k-1)(k^2+k+1)$, kde $k^2 + k + 1 > 0$, ať je reálné číslo k jakékoli). Rovnost $k = 1$ podle určení čísla k ovšem znamená, že $a = b = c \neq 0$, tudíž podíly $a/(b+c)$, $b/(c+a)$, $c/(a+b)$ mají smysl a stejnou hodnotu 1/2.]

D1. Určete, jakých hodnot může nabývat výraz

$$\frac{a+bc}{a+b} + \frac{b+ca}{b+c} + \frac{c+ab}{c+a},$$

jsou-li a, b, c kladná reálná čísla se součtem 1. [70–C–I–4]

D2. Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla, pro něž platí $ab + bc + ca = 1$. Určete, jakých hodnot nabývá výraz

$$\frac{a(b^2+1)}{a+b} + \frac{b(c^2+1)}{b+c} + \frac{c(a^2+1)}{c+a}.$$

[70–C–S–3]

D3. Nechť x, y, z jsou kladná reálná čísla, jejichž součin je roven 1. Dokažte, že platí rovnost

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=1.$$

[První zlomek rozšiřte z, druhý xz a třikrát využijte podmínku $xyz=1$.]

D4. Pro reálná čísla x, y, z platí

$$|x+y|=1-z, \quad |y+z|=1-x, \quad |z+x|=1-y.$$

Zjistěte, jakých všech hodnot může nabývat součet $x+y+z$. Pro každý vyhovující součet uveďte příklad odpovídajících čísel x, y, z. [70–B–S–1]

D5. Pro reálná čísla a, b, c jsou oba součty $a+b+c$ a $a^3+b^3+c^3$ rovny nule. Najděte všechny možné hodnoty součinu abc. [0. Zapišme, že nula se rovná součtu $a^3+b^3+c^3$, kam rovnou dosadíme $c=-a-b$:

$$0=a^3+b^3+(-a-b)^3=a^3+b^3-\left(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\right)=-3ab(a+b).$$

Vidíme, že nulové je alespoň jedno z čísel a, b, $a+b$, přitom třetí z nich je rovno $-c$. Odtud už plyne $abc=0$.]

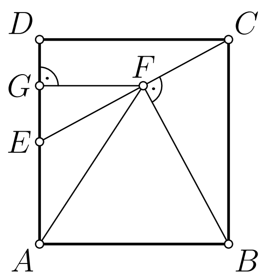
D6. Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\frac{1}{x+y}+z=1, \quad \frac{1}{y+z}+x=1, \quad \frac{1}{z+x}+y=1.$$

[69–A–II–1]

D7. Pro nenulová reálná čísla a, b, c platí $a^2-b^2=bc$ a $b^2-c^2=ca$. Ukažte, že pak také $a^2-c^2=ab$. [Sečtením daných rovností obdržíme $a^2-c^2=bc+ca$, takže stačí ověřit rovnost $bc+ca=ab$ neboli $a(b-c)=bc$. K tomu dané rovnosti upravíme do tvaru $a^2=b(b+c)$, $(b-c)(b+c)=ca$ a pak mezi sebou vynásobíme, čímž dostaneme $a^2(b-c)(b+c)=abc(b+c)$. Odtud už po vydělení obou stran součinem $a(b+c)$ získáme ověřovanou rovnost. Zmíněné vydělení je korektní, neboť podle zadání platí $a\neq 0$ a případná rovnost $b+c=0$ by spolu s $b^2-c^2=ca$ vedla k rovnosti $0=ca$, která je ve sporu s nenulovostí čísel a, c.]

3. *Nechť E je střed strany AD pravoúhelníku $ABCD$. Předpokládejme, že pata F kolmice z vrcholu B k přímce CE leží uvnitř úsečky CE a označme G patu kolmice z bodu F ke straně AD. Dokažte, že přímka CE půlí úhel AFG.* (Jaroslav Švrček)



NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí rovnosti $|\sphericalangle BAD|=42°$, $|\sphericalangle ABC|=79°$, $|\sphericalangle DCB|=138°$ a $|\sphericalangle BDC|=25°$. Určete $|\sphericalangle ACB|$. [76°. Díky součtu $42°+138°=180°$ je čtyřúhelník $ABCD$ tětivový, takže v něm platí $|\sphericalangle ACB|=|\sphericalangle ADB|$ a $|\sphericalangle ADC|=180°-|\sphericalangle ABC|=101°$, tudíž $|\sphericalangle ADB|=|\sphericalangle ADC|-|\sphericalangle BDC|=101°-25°=76°$.]

N2. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s výškami AD a BE.* Dokažte, že střed kružnice opsané trojúhelníku CDE leží na výšce trojúhelníku ABC z vrcholu C. [Označme H průsečík výšek AD a BE. Díky pravým úhlům CEH a CDH je podle Thaletovy věty čtyřúhelník $CEHD$ tětivový a střed kružnice jemu opsané je středem úsečky CH, tudíž skutečně leží na třetí výšce trojúhelníku ABC.]

N3. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s výškami AD, BE a CF. Dokažte, že tyto výšky půlí vnitřní úhly trojúhelníku DEF. [S ohledem na symetrii stačí dokázat pouze rovnost $|\sphericalangle DFC| = |\sphericalangle EFC|$. Díky pravým úhlům nad stranou AC je čtyřúhelník $AFDC$ tětivový, odkud $|\sphericalangle DFC| = |\sphericalangle DAC|$. Podobně je tětivový i čtyřúhelník $ABDE$, takže $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle DBE| = |\sphericalangle CBE|$. Konečně i čtyřúhelník $CEFB$ je tětivový, takže $|\sphericalangle CBE| = |\sphericalangle CFE|$. Dohromady už máme $|\sphericalangle DFC| = |\sphericalangle CFE|$, jak jsme slíbili dokázat. Kratší důkaz shodnosti úhlů DFC a EFC: V tětivovém čtyřúhelníku $ACDF$ jsou shodné úhly DFC a DAC, přitom druhý z nich má z $\triangle DAC$ velikost $90° - \gamma$, kde $\gamma = |\sphericalangle BCA|$. Úhel DFC tak má velikost $90° - \gamma$, která se nezmění, vyměníme-li navzájem označení vrcholů A a B. Tuto velikost proto má i úhel EFC.]

D1. Jsou dány dva tětivové čtyřúhelníky $ABXY$ a $CDYX$, přitom jejich společné vrcholy X a Y leží po řadě na úsečkách AC a BD. Dokažte, že platí $AB \parallel CD$. [Stačí dokázat shodnost střídavých úhlů BAC a DCA, tedy úhlů BAX a DCX (neboť X leží mezi A a C). Využijeme k tomu vlastností obou tětivových čtyřhelníků a toho, že úhly BYX a XYD jsou vedlejší (neboť Y leží mezi B a D): $|\sphericalangle BAX| = |\sphericalangle BYX| = 180° - |\sphericalangle XYD| = 180° - (180° - |\sphericalangle DCX|) = |\sphericalangle DCX|$.]

D2. Nechť D je vnitřní bod přepony AB pravoúhlého trojúhelníku ABC. Označme X a Y středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům ADC a CDB. Dokažte, že body C, D, X a Y leží na jedné kružnici. [Protože úhly CAD a DBC jsou ostré, středy X a Y leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou DC a podle věty o obvodovém a středovém úhlu pro velikosti konvexních středových úhlů CXD a DYC platí $|\sphericalangle CXD| = 2|\sphericalangle CAD|$ a $|\sphericalangle DYC| = 2|\sphericalangle DBC|$. Sečtením obou rovností dostaneme $|\sphericalangle CXD| + |\sphericalangle DYC| = 2(|\sphericalangle CAD| + |\sphericalangle DBC|) = 2 \cdot 90° = 180°$, tudíž $CXDY$ je tětivový čtyřúhelník. Dokonce platí, že kružnice jemu opsaná má průměr XY, neboť trojúhelníky CXY a DXY jsou shodné podle věty *sss*, takže v tětivovém čtyřúhelníku $CXDY$ jsou úhly u protějších vrcholů C a D shodné, a tudíž pravé.]

D3. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Tečny v bodech A, B ke kružnici tomuto trojúhelníku opsané se protínají v bodě T. Předpokládejme, že přímka rovnoběžná se stranou AC, která prochází bodem T, protíná stranu BC v bodě D. Dokažte, že $|AD| = |CD|$. [Klíčem k řešení je odhalení tětivovosti čtyřúhelníku $ATBD$. K důkazu tohoto poznatku stačí ověřit, že oba úhly BAT a BDT mají stejnou velikost $\gamma = |\sphericalangle BCA|$ – podle zadání totiž oba body A, D leží s celou opsanou kružnicí na jednu stranu od její tečny BT. Pro první úhel úhel TAB to přímo plyne z věty o obvodovém a úsekovém úhlu, pro druhý úhel BDT je to důsledek souhlasné rovnoběžnosti úseček AC a TD. Čtyřúhelník $ATBD$ je tedy skutečně tětivový. Nyní už dokazovaná rovnost $|AD| = |CD|$ snadno vyplyne z toho, že v trojúhelníku CAD má velikosti γ nejen úhel DCA, ale také úhel CAD. Ten je

* Jako obvykle *výškou trojúhelníku* rozumíme *úsečku*, kterou popisujeme jejími krajními body.

totiž shodný se střídavým úhlem ADT, ten díky našemu odhalení s úhlem ABT, který je konečně podle $|TA| = |TB|$ shodný s úhlem TAB, o jehož velikosti γ už víme.]

D4. Nechť AC je průměr kružnice opsané tětivovému čtyřúhelníku $ABCD$. Předpokládejme, že na polopřímkách opačných k polopřímkám AD a DC existují po řadě body $A' \neq A$ a $C' \neq D$ takové, že platí $|AB| = |A'B|$ a $|BC| = |BC'|$. Dokažte tvrzení:
a) Body A', B, C' a D leží na téže kružnici k.
b) Je-li O střed kružnice k a O_A, O_C jsou po řadě středy kružnic opsaných trojúhelníkům $AA'B$, $CC'B$, pak platí $OO_A \perp OO_C$. [69–B–I–3]

D5. Na stranách AB a BC daného trojúhelníku ABC leží po řadě takové body D a E, že $|BD| = |DC| = |CA|$ a $|EC| = |ED|$. Dokažte, že $|AE| = |BE|$. [72–B–II–3]

D6. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C. Nechť D je libovolný vnitřní bod odvěsny AC a p kolmice z bodu D k přeponě AB. Označme $E \neq D$ bod přímky p takový, že body A, B, D, E leží na kružnici. Označme ještě F průsečík přímek p a BC. Dokažte, že $|AE| = |AF|$. [70–B–II–3]

D7. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB a bod P uvnitř jeho výšky z vrcholu C. Přímka AP protne kružnici opsanou trojúhelníku ABC v bodě Q různém od A. Rovnoběžka se základnou AB vedená bodem P protne rameno BC v bodě R. Dokažte, že polopřímka QR je osou úhlu AQB. [71–A–II–3]

4. *Rozhodněte, zda existuje pětice přirozených čísel*
(i) a, a, a, a, b $(a \neq b)$,
(ii) a, a, b, b, c $(a \neq b \neq c \neq a)$,
v níž je každé z těchto čísel dělitelem součtu každých tří ze zbylých čtyř čísel.

(Jaroslav Zhouf)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro celá čísla n, a, b platí $n \mid a$ a $n \mid b$. Dokažte, že pak pro libovolná celá čísla k, l platí rovněž $n \mid ka + lb$ (speciálně například $n \mid a + b$ a $n \mid a - b$). [Podle podmínek $n \mid a$ a $n \mid b$ existují celá čísla a' a b' tak, že $a = a'n$ a $b = b'n$. Potom $ka + lb = ka'n + lb'n = (ka' + lb')n$, kde $ka' + lb'$ je celé číslo, a proto $n \mid ka + lb$.]

N2. Pro která přirozená čísla n je zaručeno, že celá čísla u, v splňující obě podmínky $n \mid u+v$ a $n \mid u-v$ jsou sama dělitelná číslem n? [Právě pro lichá n. Z $n \mid u+v$ a $n \mid u-v$ plyne, že $n \mid 2u$ a $n \mid 2v$, neboť $2u = (u+v)+(u-v)$ a $2v = (u+v)-(u-v)$. Je-li n liché, je n s číslem 2 nesoudělné, a proto z $n \mid 2u$ a $n \mid 2v$ už plyne $n \mid u$, resp. $n \mid v$. Pro sudé n uvažte protipříklad $u = v = n/2$.]

N3. Dokažte, že pokud pro přirozená čísla a a b platí $a \mid b$ a $b \mid a$, pak $a = b$. [Jelikož pro každý kladný dělitel d daného přirozeného čísla u zřejmě platí $d \leqq u$, z $a \mid b$ a $b \mid a$ plyne po řadě $a \leqq b$ a $b \leqq a$, dohromady $a = b$. Jinak můžeme zapsat rovnosti $a = kb$ a $b = la$ pro vhodná přirozená čísla k a l, odkud po vynásobení dostaneme $ab = kbla$ a dále po vydělení ab obdržíme $kl = 1$, což znamená, že nutně $k = l = 1$.]

N4. Dokažte, že pokud pro různá přirozená čísla u a v platí $u \mid v$, pak $2u \leqq v$. [Z $u \mid v$ plyne $v = ku$ pro vhodné přirozené číslo, přitom z $u \neq v$ plyne $k \neq 1$, tedy $k \geqq 2$. Proto $v = ku \geqq 2u$.]

D1. Pro přirozená čísla a, b platí $a \mid 9b$ a $b \mid 9a$. Určete všechny možné hodnoty podílu a/b. [$9, 3, 1, 1/3, 1/9$. Vztah $a \mid 9b$ znamená $9b = ka$ pro vhodné přirozené k. Proto nyní $b \mid 9a$ přepíšeme jako $9b \mid 81a$, odkud po dosazení za $9b$ dostaneme vztah $ka \mid 81a$ neboli $k \mid 81$. Číslo k je tedy jeden z dělitelů $1, 3, 9, 27, 81$ čísla 81. Protože z $9b = ka$ plyne $a/b = 9/k$, každá hodnota a/b se musí rovnat jednomu z čísel $9, 3, 1, 1/3, 1/9$. Všechny tyto hodnoty jsou dosažitelné, například dvojicemi (a, b) z množiny $\{(9, 1), (3, 1), (1, 1), (1, 3), (1, 9)\}$. Jiné řešení: Hodnota podílu a/b ani platnost podmínek $a \mid 9b$, $b \mid 9a$ se nezmění, když čísla a, b vydělíme jejich největším společným dělitelem. Proto stačí uvažovat jen dvojice nesoudělných čísel a a b. Pro ně jsou podmínky $a \mid 9b$ a $b \mid 9a$ po řadě ekvivalentní s podmínkami $a \mid 9$ a $b \mid 9$, takže stačí vypočítat hodnoty a/b pro všechny dvojice (a, b) nesoudělných dělitelů čísla 9, tedy pro dvojice z množiny $\{(9, 1), (3, 1), (1, 1), (1, 3), (1, 9)\}$.]

D2. Na školní zahradě hraje skupina žáků hru zvanou molekuly. Učitel jim nejprve uložil, aby se rozdělili do trojic. Jeden žák přebyl, a tak z další hry vypadl. Zbylí žáci se pak měli rozdělit do čtveřic. Opět jeden žák přebyl a vypadl. Poté se zbylí žáci měli rozdělit do pětic, zase jeden žák přebyl a vypadl. Učitel nyní ukládá, aby se zbylí žáci rozdělili do šestic. Dokažte, že opět jeden žák přebyde. [71–C–I–1]

D3. Určete všechny dvojice (m, n) kladných celých čísel, pro něž je číslo $4(mn + 1)$ dělitelné číslem $(m + n)^2$. [60–A–II–3]

D4. Určete všechna kladná celá čísla m, n taková, že n je dělitelem $2m - 1$ a současně m je dělitelem $2n - 1$. [59–A–II–3]

D5. Najděte všechny trojice navzájem různých prvočísel p, q, r splňujících tři podmínky $p \mid q + r$, $q \mid r + 2p$ a $r \mid p + 3q$. [55–A–III–5]

5. *V pravoúhlém trojúhelníku je poměr poloměru kružnice vepsané ku poloměru kružnice opsané* $2 : 5$. *Dokažte, že délka jedné z jeho stran je aritmetickým průměrem délek zbylých dvou stran.* (Mária Dományová)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Zdůvodněte, že poloměr kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku je polovinou délky jeho přepony. [Podle Thaletovy věty je přepona pravoúhlého trojúhelníku průměrem kružnice jemu opsané.]

N2. Dokažte, že v pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami délek a, b a přeponou délky c platí pro poloměr r kružnice jemu vepsané vzorec $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$. [Body dotyku kružnice vepsané rozdělují strany trojúhelníku na šest úseků. Dva z nich (ty při vrcholu pravého úhlu) jsou sousedními stranami čtverce o straně délky r. Celé odvěsny tak mají délky $a = r + x$ a $b = r + y$, kde x a y jsou délky jejich úseků při vrcholech ostrých úhlů. Ty jsou (díky souměrnostem podle os těchto úhlů) shodné s dvěma úseky, na které je rozdělena přepona, která má proto délku $c = x + y$.

Nyní je jasné, že zřejmou rovnost $2r = (r+x)+(r+y)-(x+y)$ můžeme přepsat jako $2r = a + b - c$. Po vydělení číslem 2 jsme s důkazem hotovi.]

N3. Pravoúhlý trojúhelník o odvěsnami délek a, b a přeponou délky c splňuje podmínku $3a + 4b = 5c$. Určete všechny možné hodnoty poměru $a : c$. [Zadanou rovnost vydělíme c a dostaneme $3a/c+4b/c = 5$. Z Pythagorovy věty máme $a^2+b^2 = c^2$, takže $(a/c)^2 + (b/c)^2 = 1$. To nám dává pro podíly $x = a/c$ a $y = b/c$ soustavu rovnic $3x + 4y = 5$ a $x^2 + y^2 = 1$. Dosadíme-li vyjádření $y = (5 - 3x)/4$ z první rovnice do druhé rovnice, dostaneme po vynásobení číslem 16 rovnici $16x^2 + (5 - 3x)^2 = 16$, po úpravě $(5x - 3)^2 = 0$. Odtud $x = 3/5$. Nalezená hodnota $a/c = x = 3/5$ poměru $a : c$ je možná – například $a = 3$, $b = 4$ a $c = 5$ jsou délky stran pravoúhlého trojúhelníku a platí pro ně $3a + 4b = 5c$.]

D1. Pro poloměr r kružnice vepsané obecnému trojúhelníku dokažte vzorec $r = S/s$, kde S je obsah tohoto trojúhelníku a s je polovina jeho obvodu. [Označme I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC s obvykle značenými délkami stran. Obsah S celého trojúhelníku je součtem obsahů trojúhelníků BCI, CAI a ABI, které se po řadě rovnají $\frac{1}{2}ar$, $\frac{1}{2}br$ a $\frac{1}{2}cr$. Z rovnosti $S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr$ už snadnou úpravou dostaneme dokazovaný vzorec.]

D2. Odvoďte vzorec $r = \frac{1}{2}(a+b-c)$ z úlohy N1 užitím výsledku úlohy D1. [Trojúhelník ze zadání úlohy N1 má obsah $S = \frac{1}{2}ab$. Podle vzorce z D1 tak s přihlédnutím k $c^2 = a^2 + b^2$ platí

$$r = \frac{S}{s} = \frac{\frac{ab}{2}}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{ab(a+b-c)}{(a+b+c)(a+b-c)} = \frac{ab(a+b-c)}{(a+b)^2-c^2} =$$
$$= \frac{ab(a+b-c)}{(a+b)^2-(a^2+b^2)} = \frac{ab(a+b-c)}{2ab} = \frac{a+b-c}{2}.]$$

D3. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Dokažte, že velikost jeho výšky CD je rovna součtu poloměrů kružnic vepsaných trojúhelníkům ABC, CAD a CBD. [Při běžném označení $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$, $v = |CD|$, $c_a = |AD|$ a $c_b = |BD|$ platí pro poloměry r, r_a, r_b kružnic vepsaných po řadě pravoúhlým trojúhelníkům ABC, CAD a CBD podle úlohy N2 vzorce

$$r = \frac{a+b-c}{2}, \quad r_a = \frac{c_a+v-b}{2} \quad \text{a} \quad r_b = \frac{c_b+v-a}{2}.$$

Jejich sečtením už dostaneme $r+r_a+r_b = v+\frac{1}{2}(c_a+c_b-c) = v$, neboť $c_a+c_b = c$.]

D4. Pravoúhlý trojúhelník má celočíselné délky stran a obvod 11 990. Navíc víme, že jedna jeho odvěsna má prvočíselnou délku. Určete ji. [71–B–I–1]

D5. Pravoúhlý trojúhelník má celočíselné délky stran. Jeho obvod je druhá mocnina přirozeného čísla. Také víme, že jedna jeho odvěsna má délku rovnou druhé mocnině prvočísla. Určete všechny možné hodnoty této délky. [71–B–S–3]

D6. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB a odvěsnami délek $|AC| = 4$ a $|BC| = 3$ leží navzájem se dotýkající kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ tak, že k_1 se dotýká stran AB a AC a k_2 se dotýká stran AB a BC. Určete poloměry r_1 a r_2, jestliže platí $4r_1 = 9r_2$. [62–A–II–3]

6. *Rozhodněte, zda lze čtvercovou tabulku 4×4 vyplnit navzájem různými přirozenými čísly od 1 do 16 tak, že v každém řádku i každém sloupci existuje číslo, jehož sedminásobek je součtem zbylých tří čísel.* (Jaromír Šimša)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Rozhodněte, zda lze čtvercovou tabulku 3×3 vyplnit navzájem různými přirozenými čísly od 1 do 9 tak, aby v každém řádku existovalo číslo, které se rovná součtu zbylých dvou čísel. [Nejde to. Důkaz sporem: Mějme vyhovující tabulku. Je-li v jejím prvním řádku je číslo a a další dvě čísla se součtem a, je součet všech tří čísel roven $2a$, což je sudé číslo. Podobně jsou sudé součty čísel v druhém i třetím řádku, a tedy i součet všech 9 čísel v tabulce. Ten je však roven $1 + \ldots + 9 = 45$, spor.]

N2. Rozhodněte, zda lze čtvercovou tabulku 3×3 vyplnit navzájem různými přirozenými čísly od 1 do 9 tak, aby v každém řádku existovalo číslo, jehož čtyřnásobek se rovná součtu zbylých dvou čísel. [Nejde to. Důkaz sporem: Mějme vyhovující tabulku. V prvním řádku je číslo a a zbylá dvě čísla se součtem $4a$, součet všech tří čísel tak je $5a$. Analogický význam jako a bude mít číslo b z druhého řádku a číslo c z třetího řádku. Součet 45 všech 9 čísel v tabulce je tak roven $5(a+b+c)$, odkud $a + b + c = 9$. Protože součet jakýchkoli dvou čísel z tabulky nepřevyšuje $9 + 8 = 17$, platí to i pro čísla $4a$, $4b$ a $4c$, takže $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4\}$. Spolu s $a+b+c = 9$ to znamená, že $\{a, b, c\} = \{2, 3, 4\}$. Číslo 4 tak sdílí řádek s dvěma čísly o součtu $4 \cdot 4 = 16$, jde tedy o čísla 7 a 9. Odtud už plyne, že číslo 3 nemůže sdílet řádek s dvěma čísly o součtu $4 \cdot 3 = 12$, neboť každá z příhodných dvojic $(3, 9)$, $(4, 8)$ a $(5, 7)$ je vyloučena kvůli řádku s čísly 4, 7, 9.]

N3. Tabulka 4×4 je vyplněna různými celými čísly od 1 do 16. Jisté číslo s v této tabulce má tu vlastnost, že jeho čtyřnásobek je roven jak součtu ostatních tří čísel z jeho řádku, tak součtu ostatních tří čísel z jeho sloupce. Určete největší možné takové s. [9. Nechť vyhovující číslo s sdílí řádek s trojicí čísel (a, b, c), a sloupec s trojicí (d, e, f). Sečtením rovností $4s = a + b + c$ a $4s = d + e + f$ dostaneme, že číslo $8s$ je rovno součtu šesti různých čísel z tabulky, který nepřevyšuje součet čísel od 11 do 16 rovný 81. Platí tudíž $8s \leqq 81$, odkud $s \leqq 10$. Hodnota $s = 10$ ovšem možná není: součty $a+b+c$ a $d+e+f$ by musely být (až na pořadí sčítanců) mezi součty $16 + 15 + 9$, $16 + 13 + 11$, $15 + 14 + 11$ a $15 + 13 + 12$ – každé dva z nich však mají společný sčítanec. Hodnota $s = 9$ už možná je: uvažme tabulku, ve které číslo 9 sdílí řádek s trojicí $(16, 15, 5)$ a sloupec s trojicí $(14, 12, 10)$, ostatní čísla jsou rozmístěna jakkoli.]

D1. Tabulka 10×10 je vyplněna čísly 1 a -1 tak, že součet čísel v každém řádku i sloupci je dělitelný třemi. Určete největší možný součet čísel v tabulce a ukažte, že větší být nemůže. Uveďte rovněž příklad tabulky s určeným největším součtem. [71–C–S–1]

D2. Na školní zahradě hraje skupina žáků hru zvanou molekuly. Učitel jim nejprve uložil, aby se rozdělili do trojic. Jeden žák přebyl, a tak z další hry vypadl. Zbylí žáci se pak měli rozdělit do čtveřic. Opět jeden žák přebyl a vypadl. Poté se zbylí žáci měli rozdělit do pětic, zase jeden žák přebyl a vypadl. Učitel nyní ukládá, aby se zbylí žáci rozdělili do šestic. Dokažte, že opět jeden žák přebyde. [71–C–I–1]

D3. Tabulka 10×10 je vyplněna čísly 1 a -1 tak, že součet čísel v každém řádku až na jeden je roven 0 a součet čísel v každém sloupci až na jeden je roven stejnému číslu s. Určete největší možnou hodnotu s a ukažte, že větší být nemůže. Uveďte rovněž příklad tabulky s určenou největší hodnotou s. [71–C–II–4]

D4. Tabulka 10×10 je vyplněna čísly -4, 3 a 10 tak, že součet čísel v každém řádku až na jeden je nejvýš 0 a součet čísel v každém sloupci až na jeden je nejvýš 0. Určete největší možný součet čísel v tabulce. [71–B–II–4]

D5. V tabulce $n \times n$, kde $n \geqq 2$, jsou po řádcích zapsána postupně celá čísla od 1 do n^2 (v prvním řádku po řadě čísla od 1 do n, ve druhém čísla od $n+1$ do $2n$ atd.) V jednom kroku můžeme vybrat libovolná dvě čísla na sousedních políčkách (tj. na takových, která mají společnou stranu) a – pokud je jejich aritmetický průměr celé číslo – tímto průměrem obě čísla nahradíme. Pro která n je možné po konečném počtu kroků dostat tabulku, ve které jsou všechna čísla stejná? [Slovenská MO, 57–A–II–3]

D6. Pro která přirozená čísla n lze do tabulky $n \times n$ vepsat všechna celá čísla od 1 do n^2 tak, aby aritmetický průměr čísel v každém řádku i sloupci tabulky byl celým číslem? [68–A–III–6]