73. ročník Matematické olympiády (2023/2024)

Zadání úloh domácí části I. kola

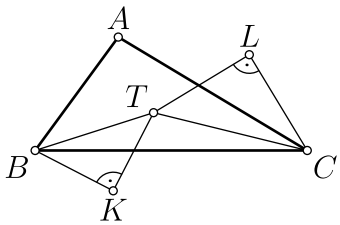
Kategorie A

1. Na párty se sešlo 20 osob, z toho 10 chlapců a 10 dívek. Každému se líbí právě k osob opačného pohlaví. Je vždy možné vytvořit pár, v němž se oběma líbí ten druhý? Řešte a) pro $k = 5$, b) pro $k = 6$. (*Josef Tkadlec*)

2. Z číslic 1 až 9 vytvoříme devítimístné číslo s navzájem různými číslicemi. Poté vypočítáme součet každé trojice sousedních číslic a těchto sedm součtů zapíšeme vzestupně. Rozhodněte, zda lze takto získat posloupnost

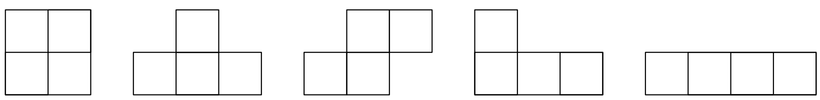
a) 11, 15, 16, 18, 19, 21, 22,
b) 11, 15, 16, 18, 19, 21, 23. (*Patrik Bak*)

3. Je dán trojúhelník ABC s těžištěm T. Nad úsečkami BT a CT jsou sestrojeny pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky BTK a CTL stejně jako na obrázku. Označme D střed strany BC a E střed úsečky KL. Určete všechny možné hodnoty poměru $|AT|/|DE|$. (*Michal Rolínek*)



4. O lichém prvočísle p řekneme, že je *speciální*, pokud součet všech prvočísel menších než p je násobkem p. Existují dvě po sobě jdoucí prvočísla, která jsou speciální? (*Jaroslav Zhouf*)

5. Rozhodněte, zda existuje neprázdná podmnožina políček tabulky 7×7 s následující vlastností: Pro každé z *tetramin*



lze tuto podmnožinu vyplnit bez překrývání výhradně jeho kopiemi. Jednotlivé kopie můžeme libovolně otáčet a překlápět. (*Michal Rolínek*)

6. Pro reálná čísla a, b, c, d z intervalu $\langle 1, 2\rangle$ platí $(a+c)(b+d) = 8$. Dokažte, že

$$\frac{1}{a^2+b^2-1} + \frac{1}{b^2+c^2-1} + \frac{1}{c^2+d^2-1} + \frac{1}{d^2+a^2-1} \geqq 1,$$

a určete, kdy nastane rovnost. (*Zdeněk Pezlar*)

Kategorie B

1. Kolik neprázdných podmnožin množiny $\{0, 1, \ldots, 9\}$ má součet prvků dělitelný třemi?
(*Eliška Macáková*)

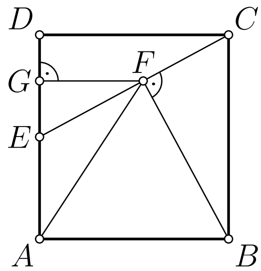
2. Pro reálná čísla a, b, c platí

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}.$$

Určete všechny možné hodnoty výrazu

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3}.$$

(*Michal Rolínek*)



3. Nechť E je střed strany AD pravoúhelníku $ABCD$. Předpokládejme, že pata F kolmice z vrcholu B k přímce CE leží uvnitř úsečky CE a označme G patu kolmice z bodu F ke straně AD. Dokažte, že přímka CE půlí úhel AFG. (*Jaroslav Švrček*)

4. Rozhodněte, zda existuje pětice přirozených čísel
(i) a, a, a, a, b ($a \neq b$),
(ii) a, a, b, b, c ($a \neq b \neq c \neq a$),
v níž je každé z těchto čísel dělitelem součtu každých tří ze zbylých čtyř čísel.
(*Jaroslav Zhouf*)

5. V pravoúhlém trojúhelníku je poměr poloměru kružnice vepsané ku poloměru kružnice opsané $2:5$. Dokažte, že délka jedné z jeho stran je aritmetickým průměrem délek zbylých dvou stran. (*Mária Dományová*)

6. Rozhodněte, zda lze čtvercovou tabulku 4×4 vyplnit navzájem různými přirozenými čísly od 1 do 16 tak, že v každém řádku i každém sloupci existuje číslo, jehož sedminásobek je součtem zbylých tří čísel. (*Jaromír Šimša*)

Kategorie C

1. Existuje deset po sobě jdoucích přirozených čísel, která jsou po řadě dělitelná čísly 9, 7, 5, 3, 1, 1, 3, 5, 7, 9? (*Jaroslav Zhouf*)

2. Pro střed M přepony AC pravoúhlého trojúhelníku ABC platí $|BC| = |CM|$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům ABC a ABM mají stejné poloměry. (*Michal Pecho*)

3. Uvažujme 20 výroků:

„Mám právě jednu sestru.“ „Mám právě jednoho bratra.“
„Mám právě dvě sestry.“ „Mám právě dva bratry.“
⋮
„Mám právě deset sester.“ „Mám právě deset bratrů.“

a) Každý ze čtyř sourozenců pronesl jiný z těchto 20 výroků. Je možné, že všichni čtyři měli pravdu?

b) Najděte největší přirozené číslo n takové, že každý z n sourozenců může pronést jiný z těchto 20 výroků a mít pravdu.* *Josef Tkadlec*

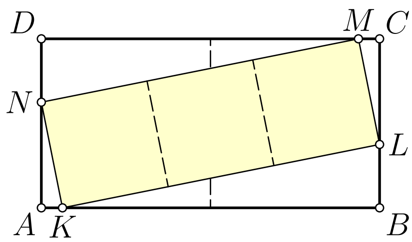
4. Kolik uspořádaných čtveřic přirozených čísel (a, b, c, d) se součtem 100 splňuje rovnice

$$(a+b)(c+d) = (b+c)(a+d) = (a+c)(b+d)?$$

(*Patrik Bak*)

5. Na tabuli jsou napsána čísla 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$. V každém kroku čísla a, b, c napsaná na tabuli smažeme a nahradíme je součiny ab, bc, ca. Zjistěte, zda po několika krocích bude znovu některé z čísel napsaných na tabuli přirozené. (*Jaroslav Zhouf*)

6. Je dán obdélník $ABCD$, kde $|AB| : |BC| = 2 : 1$. Na jeho stranách AB, BC, CD, DA jsou dány po řadě body K, L, M, N tak, že $KLMN$ je obdélník, v němž $|KL| : |LM| = 3 : 1$. Vypočtěte poměr obsahů obdélníků $ABCD$ a $KLMN$. (*Josef Tkadlec*)



* Všichni sourozenci mají stejné rodiče.