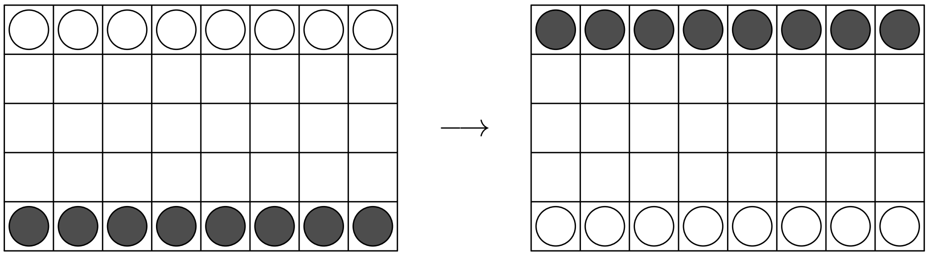
72. ročník Matematické olympiády (2022/2023)

Úlohy krajského kola kategorie A

1. Na hracím plánu 8×5 je rozmístěno 8 bílých a 8 černých žetonů jako na obrázku vlevo. V jednom tahu je možné posunout žeton na prázdné políčko sousedící stranou. Určete nejmenší počet tahů, jimiž lze z původního rozestavení získat rozestavení na obrázku vpravo.



2. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\sqrt{\sqrt{x}+2} = y-2,$$
$$\sqrt{\sqrt{y}+2} = x-2.$$

3. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí $|AB| = |BC| = |CD|$. Nechť navíc pro průsečík P jeho úhlopříček platí $|\sphericalangle APD| < 90^\circ$. Označme R a S po řadě obrazy bodů A a D v osových souměrnostech podle přímek BD a AC. Dokažte, že úsečky BC a RS jsou rovnoběžné.

4. Najděte všechny trojice přirozených čísel a, b, c, pro které je součin

$$(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c+2036)$$

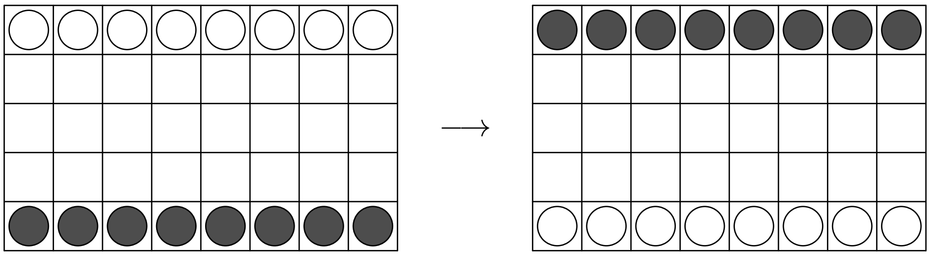
roven mocnině některého prvočísla s celočíselným exponentem.

Krajské kolo kategorie A se koná

v úterý 10. ledna 2023

tak, aby začalo nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Bodová hranice k určení úspěšných řešitelů bude stanovena centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. *Na hracím plánu 8×5 je rozmístěno 8 bílých a 8 černých žetonů jako na obrázku vlevo. V jednom tahu je možné posunout žeton na prázdné políčko sousedící stranou. Určete nejmenší počet tahů, jimiž lze z původního rozestavení získat rozestavení na obrázku vpravo.*



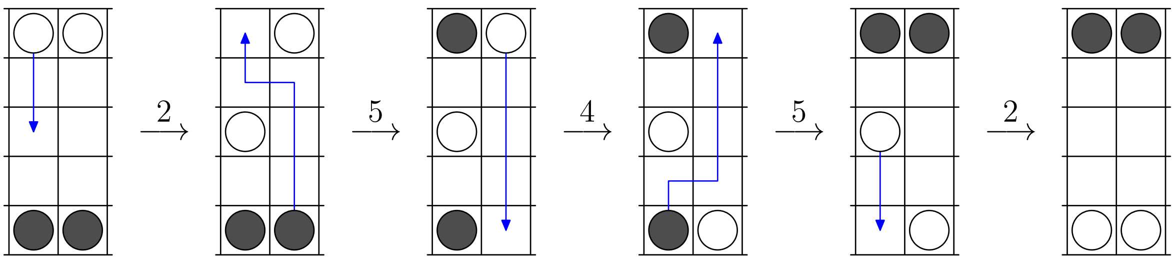
(Josef Tkadlec)

Řešení. V první části dokážeme, že ke splnění úkolu je vždy třeba zapotřebí aspoň 64 tahů ve svislém směru a aspoň 8 tahů ve vodorovném směru, celkem tedy aspoň $64 + 8 = 72$ tahů.

Je zřejmé, že s každým z 8 bílých žetonů musíme táhnout aspoň čtyřikrát směrem dolů a s každým z 8 černých žetonů aspoň čtyřikrát směrem nahoru. Celkem tak musíme skutečně provést aspoň $8 \times 4 + 8 \times 4 = 64$ tahů ve svislém směru.

V každém sloupci herního plánu na začátku leží jeden bílý žeton nad jedním černým žetonem, na konci je to naopak. Alespoň jeden ze dvou původních žetonů musí tedy svůj sloupec v některém tahu opustit, tj. posunout se ve vodorovném směru. Jelikož to platí pro každý z 8 sloupců, musíme skutečně provést aspoň 8 tahů ve vodorovném směru.

Ve druhé části řešení ukážeme, že 72 tahů na splnění úkolu stačí.* Rozdělíme k tomu daný hrací plán 8×5 na 4 části 2×5 a v každé z nich přesuneme žetony užitím $2+5+4+5+2 = 18$ tahů v pěti etapách znázorněných na obrázku. Celkově to pak bude skutečně $4 \cdot 18 = 72$ tahů.



Závěr. Nejmenší možný počet tahů je roven 72.

Poznámka. Dokážeme, že každé řešení zadaného úkolu 72 tahy má následující vlastnost: *Všechny provedené tahy lze rozdělit do čtyř skupin po 18 tazích tak, že tahy z téže skupiny (v původním pořadí) řeší „redukci“ zadaného úkolu na jednu ze čtyř částí* 2×5, *na které je celý plán* 8×5 *rozdělen.* K tomu je nutné a současně stačí ukázat, že žádný žeton v průběhu daných 72 tahů neopustí tu ze zmíněných částí 2×5, ve které se původně nacházel. Jistě si přitom stačí všímat jen tahů ve vodorovném směru – říkejme jim *v*-tahy.

* V poznámce za řešením uvedeme poznatek, podle kterého lze *všechna* řešení 72 tahy sestrojit, známe-li všechna řešení 18 tahy pro hrací plán 2×5.

Označme sloupce hracího plánu čísly 1 až 8 zleva doprava. Nechť $i \to i+1$, resp. $i \to i-1$ značí v-tah ze sloupce i doprava, resp. doleva. Se slíbeným důkazem budeme hotovi, když ukážeme, že osm jednotlivých v-tahů z každého řešení 72 tahy má (v některém pořadí) tvar

$$1 \to 2,\ 2 \to 1,\ 3 \to 4,\ 4 \to 3, \ldots, 7 \to 8,\ 8 \to 7.$$

To je ovšem důsledek té naší úvahy, podle které při *libovolném řešení* pro každý sloupec i existuje aspoň jeden v-tah $i \to *$; protože při řešení 72 tahy je v-tahů právě osm, je v něm po jednom tahu $i \to *$ pro každé i, a tedy i po jednom tahu $* \to i$ pro každé i, neboť počet tahů *ze* sloupce i se musí rovnat počtu tahů *do* sloupce i. Pro $i = 1$ jde nutně o tahy $1 \to 2$ a $2 \to 1$, a tedy pro $i = 3$ o tahy $3 \to 4$ a $4 \to 3$, atd. až pro $i = 7$ o tahy $7 \to 8$ a $8 \to 7$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky následovně:

A1. Důkaz, že je zapotřebí aspoň 64 svislých tahů: 1 bod.
A2. Důkaz, že je zapotřebí aspoň 8 vodorovných tahů: 1 bod.
A3. Důkaz, že je zapotřebí aspoň 72 tahů: 3 body.
A4. Popis libovolného minimálního řešení (tj. posloupnosti 72 tahů, která převede původní rozestavení na cílové): 2 body
A5. Vysvětlení, proč je řešení z A4 skutečně složeno ze 72 tahů: 1 bod.
A6. Popis a určení počtu tahů některého řešení, které není minimální, tj. má více než 72 tahů: 1 bod.

Celkem pak udělte $\max(A1 + A2, A3) + \max(A4 + A5, A6)$ bodů.

2. *V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic*

$$\sqrt{\sqrt{x}+2} = y-2,$$
$$\sqrt{\sqrt{y}+2} = x-2.$$

(Radek Horenský)

ŘEŠENÍ. Nechť (x, y) je libovolné řešení dané soustavy. Jelikož hodnota $\sqrt{\sqrt{x}+2}$ je zřejmě kladná, podle první rovnice je nutně $y > 2$. Podobně z druhé rovnice plyne nutná podmínka $x > 2$.

Nyní dokážeme, že čísla x a y musí být stejná.* Využijeme k tomu poznatek, že funkce *druhá odmocnina* je rostoucí. V případě $x > y$ by tudíž platilo

$$\sqrt{\sqrt{x}+2} > \sqrt{\sqrt{y}+2},$$

což lze díky zadání přepsat jako $y-2 > x-2$ neboli $y > x$, a to je spor. Případ $x < y$ se vyloučí analogicky. Rovnost $x = y$ je tak dokázána.

Zabývejme se proto dále (jediným možným) případem $x = y$. Původní soustava dvou rovnic se tehdy zřejmě redukuje na jednu rovnici

$$\sqrt{\sqrt{x}+2} = x-2. \tag{1}$$

Po substituci $s = \sqrt{x}$, kdy $x = s^2$, přejde rovnice (1) v rovnici $\sqrt{s+2} = s^2 - 2$, přitom zřejmě $s > \sqrt{2}$. Pro každé takové s můžeme rovnici ekvivalentně umocnit na druhou a získat tak rovnici $s+2 = (s^2-2)^2$, kterou ještě přepíšeme do obvyklého tvaru $s^4 - 4s^2 - s + 2 = 0$. Všimněme si, že tato rovnice má kořen $s = 2$. Potvrzuje to i rozklad

$$s^4 - 4s^2 - s + 2 = s^2(s^2-4) - (s-2) = s^2(s-2)(s+2) - (s-2) = (s-2)(s^3+2s^2-1),$$

podle kterého teď ukážeme, že $s = 2$ je jediný kořen odvozené rovnice, který splňuje naši podmínku $s > \sqrt{2}$. Skutečně, pro každé $s > \sqrt{2}$ totiž platí $s^3 + 2s^2 - 1 > 0$ (platí to dokonce již pro $s = 1$). Jediná vyhovující hodnota $s = 2$ odpovídá jedinému řešení $x = s^2 = 4$ rovnice (1), a tedy i jedinému řešení $x = y = 4$ zadané úlohy.**

Závěr. Zadaná soustava rovnic má jediné řešení $(x, y) = (4, 4)$.

POZNÁMKA. Uveďme druhé možné odvození rovnosti $x = y$; o jiném postupu řešení rovnice (1) pojednáme v poznámce za druhým řešením.

Nový důkaz rovnosti $x = y$ zahájíme tak, že obě rovnice ze zadání umocníme na druhou

$$\sqrt{x}+2 = (y-2)^2,$$
$$\sqrt{y}+2 = (x-2)^2.$$

Odečtením druhé umocněné rovnice od první a následnými úpravami rozdílu pravých stran dostaneme

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = (y-2)^2 - (x-2)^2 = \big((y-2)-(x-2)\big)\big((y-2)+(x-2)\big) =$$
$$= (y-x)(x+y-4) = (\sqrt{y}-\sqrt{x})(\sqrt{y}+\sqrt{x})(x+y-4).$$

* Zdůrazněme, že rovnost $x = y$ neplyne z pouhé symetrie soustavy rovnic.

** Zkouška při našem postupu není nezbytná.

Připustíme-li, že $x \neq y$, po vydělení obou krajních výrazů hodnotou $\sqrt{y} - \sqrt{x} \neq 0$ obdržíme
$$-1 = (\sqrt{y} + \sqrt{x})(x + y - 4).$$
Jak však víme, obě čísla x a y jsou větší než 2, tudíž pravá strana poslední rovnosti je kladná, a to je kýžený spor.

Jiné řešení. Využijeme opět poznatek, že obě čísla x a y jsou větší než 2, a zavedeme funkci $f\colon (2, \infty) \to (2, \infty)$ předpisem $f(t) = \sqrt{t} + 2$ pro každé $t > 2$. Rovnice ze zadání přepsané do tvaru
$$\sqrt{\sqrt{x} + 2} + 2 = y,$$
$$\sqrt{\sqrt{y} + 2} + 2 = x$$
pak můžeme pomocí funkce f zapsat jako soustavu rovnic
$$f\bigl(f(x)\bigr) = y,$$
$$f\bigl(f(y)\bigr) = x.$$
Vidíme, že jejími řešením jsou právě dvojice tvaru $(x, y) = \Bigl(x, f\bigl(f(x)\bigr)\Bigr)$, kde číslo x splňuje vztah $f\Biggl(f\Bigl(f\bigl(f(x)\bigr)\Bigr)\Biggr) = x$. Ten je jistě splněn v případě, kdy platí $f(x) = x$. Ukážeme-li, že tomu tak není ve zbylých případech, kdy $f(x) < x$ nebo $f(x) > x$, zůstane nám jediný úkol – vyřešit rovnici $f(x) = x$.

K vyloučení případů $f(x) < x$ a $f(x) > x$ využijeme toho, že funkce f je zřejmě rostoucí. Díky tomu v případě $f(x) < x$ platí čtveřice nerovností
$$f\Biggl(f\Bigl(f\bigl(f(x)\bigr)\Bigr)\Biggr) < f\Bigl(f\bigl(f(x)\bigr)\Bigr) < f\bigl(f(x)\bigr) < f(x) < x,$$
neboť poslední nerovnost tehdy platí a každá předchozí nerovnost je důsledkem bezprostředně následující nerovnosti. Podobně se v případě $f(x) > x$ zdůvodní čtveřice nerovností*
$$f\Biggl(f\Bigl(f\bigl(f(x)\bigr)\Bigr)\Biggr) > f\Bigl(f\bigl(f(x)\bigr)\Bigr) > f\bigl(f(x)\bigr) > f(x) > x.$$
Tím je důkaz tvrzení o ekvivalenci rovnosti $f\Biggl(f\Bigl(f\bigl(f(x)\bigr)\Bigr)\Biggr) = x$ s rovností $f(x) = x$ hotov.

Zbývá vyřešit rovnici $f(x) = x$ s neznámou $x > 2$, což je snadné:
$$f(x) = x \iff \sqrt{x} + 2 = x \iff 0 = (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1) \iff \sqrt{x} = 2 \iff x = 4.$$
Docházíme tak ke stejnému závěru jako v prvním řešení.

---

* K dvěma uvedeným čtveřicím nerovností dodejme, že případ $f(x) < x$ nastane pro každé $x > 4$ a případ $f(x) > x$ pro každé $x \in (2, 4)$. Plyne to zřejmě z rozkladu $f(x) - x = (2 - \sqrt{x})(\sqrt{x} + 1)$, který dále využijeme i při řešení rovnice $f(x) = x$.

Poznámka. Úvahy o funkci f z druhého řešení lze rovněž využít k vyřešení rovnice (1) z prvního řešení bez přechodu k rovnici čtvrtého stupně. Rovnici (1) lze totiž zapsat jako rovnici $f\big(f(x)\big) = x$, která je ovšem ekvivalentní s jednodušší rovnicí $f(x) = x$, a to díky implikacím

$$f(x) < x \;\Rightarrow\; f\big(f(x)\big) < f(x) < x \quad \text{a} \quad f(x) > x \;\Rightarrow\; f\big(f(x)\big) > f(x) > x,$$

které se zdůvodní stejně jako ve druhém řešení. Tam jsme také zjednodušenou rovnici $f(x) = x$ vyřešili.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky následovně:

A0. Uvedení podmínek $x \geqq 2$ a $y \geqq 2$: 0 bodů.
A1. Uhodnutí řešení $(x, y) = (4, 4)$ se zkouškou: 1 bod.
B1. Důkaz rovnosti $x = y$: 3 body.
B2. Vyřešení úlohy za předpokladu $x = y$ včetně vyloučení jiných hodnot než $x = 4$: 3 body.
C1. Vyjádření soustavy ve tvaru $f\big(f(x)\big) = y \wedge f\big(f(y)\big) = x$: 2 body.
C2. Odvození rovnosti $f(x) = x$ za předpokladu $f\Bigg(f\bigg(f\big(f(x)\big)\bigg)\Bigg) = x$: 3 body
C3. Vyřešení rovnice $f(x) = x$: 1 bod
D1. Vyloučení rovnosti $f\Bigg(f\bigg(f\big(f(x)\big)\bigg)\Bigg) = x$ pro každé $x < 4$: 2 body.
D2. Vyloučení rovnosti $f\Bigg(f\bigg(f\big(f(x)\big)\bigg)\Bigg) = x$ pro každé $x > 4$: 2 body.

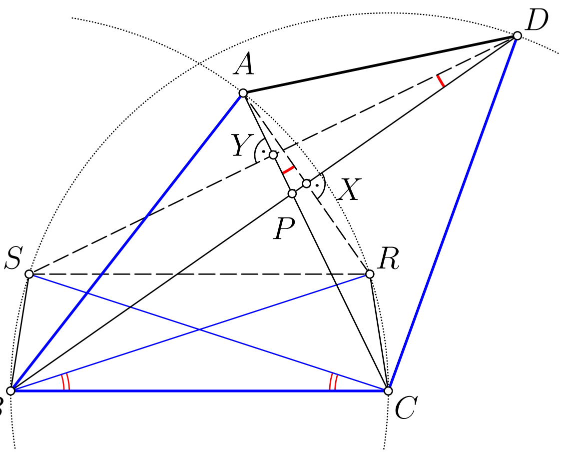
Celkově pak udělte $\max(\mathrm{A1}, \mathrm{B1} + \mathrm{B2}, \mathrm{C1} + \mathrm{C2} + \mathrm{C3}, \mathrm{C1} + \mathrm{D1} + \mathrm{D2})$ bodů. Absenci zkoušky v jinak úplném řešení nepenalizujte.

3. *V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí $|AB| = |BC| = |CD|$. Nechť navíc pro průsečík P jeho úhlopříček platí $|\sphericalangle APD| < 90°$. Označme R a S po řadě obrazy bodů A a D v osových souměrnostech podle přímek BD a AC. Dokažte, že úsečky BC a RS jsou rovnoběžné.* (Patrik Bak)

Řešení. Nejdříve si povšimneme, že ze zadaných souměrností plynou rovnosti $|BR| = |BA|$ a $|CS| = |CD|$. Dohromady s rovnostmi ze zadání dostáváme

$$|AB| = |BC| = |CD| = |BR| = |CS|. \tag{1}$$

Podle konstrukce jsou body R, S zřejmě různé, přitom střed X úsečky AR leží na její ose BD a střed Y úsečky DS na její ose AC. V následujícím odstavci dokážeme, že bod R leží uvnitř úhlu ABC a bod S uvnitř úhlu DCB, jak je tomu na našem obrázku. Dohromady to bude znamenat, že body A, D, R, S leží uvnitř téže poloroviny s hraniční přímkou BC.



Z předpokladu $|\sphericalangle APD| < 90°$ plyne $|\sphericalangle APB| > 90°$, což pro vnitřní bod P základny AC rovnoramenného trojúhelníku ABC znamená, že $|\sphericalangle ABP| < \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle ABC|$; odtud ovšem plyne $|\sphericalangle ABR| = 2 \cdot |\sphericalangle ABP| < |\sphericalangle ABC|$, tudíž bod R skutečně leží uvnitř úhlu ABC. Analogicky z nerovnosti $|\sphericalangle DPC| > 90°$ pro vnitřní bod P základny BD rovnoramenného trojúhelníku DCB usoudíme, že bod S skutečně leží uvnitř úhlu DCB.

Dalším důsledkem nerovnosti $|\sphericalangle APD| < 90°$ je, že pro vyznačené vnitřní úhly pravoúhlých trojúhelníků APX a DPY platí $|\sphericalangle XAP| = 90° - |\sphericalangle APD| = |\sphericalangle YDP|$, neboli $|\sphericalangle RAC| = |\sphericalangle SDB|$.

Vraťme se k rovnostem (1). Podle nich je bod B středem kružnice opsané trojúhelníku ARC, který jak víme leží v úhlu ABC. Podle věty o obvodovém a středovém úhlu proto platí $|\sphericalangle RBC| = 2 \cdot |\sphericalangle RAC|$. Podobnou úvahou o středu C kružnice opsané trojúhelníku BSD ležícímu v úhlu BCD dostaneme $|\sphericalangle SCB| = 2 \cdot |\sphericalangle SDB|$.

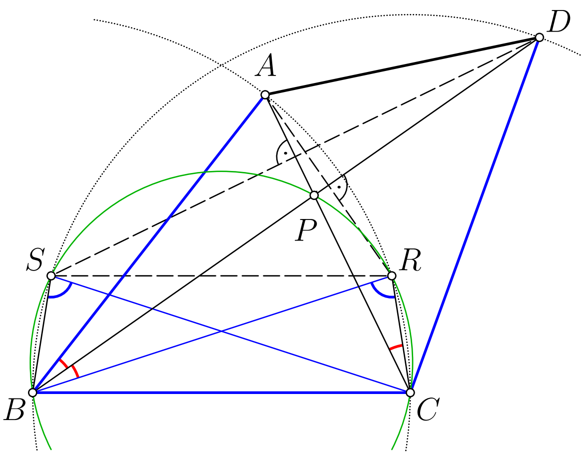
Z posledních dvou odstavců plyne rovnost $|\sphericalangle RBC| = |\sphericalangle SCB|$. Ta spolu s rovnostmi (1) vede k závěru, že (rovnoramenné) trojúhelníky RBC a SCB jsou podle věty *sus* shodné. Odtud plyne shodnost jejich výšek z vrcholů R a S ke straně BC. To s ohledem na výše odvozenou polohu bodů R a S už znamená, že $BC \parallel RS$.*

* Namísto úvahy o shodných trojúhelnících CBR a BCS stačí konstatovat, že shodné úsečky BR a CS jsou souměrně sdružené podle osy úsečky BC.

Jiné řešení. Ukážeme, že body R a S leží na kružnici opsané trojúhelníku BCP. Podrobný důkaz zapíšeme jen pro bod R, pro bod S je totiž důkaz analogický.

Stejně jako v prvním řešení odvodíme rovnosti (1) a poznatek, že bod R leží uvnitř úhlu ABC. Z podmínky $|\sphericalangle APD| < 90°$ rovněž plyne, že bod R leží také v polorovině ACD.

Podle (1) je bod B středem kružnice opsané trojúhelníku ARC, jejíž středový úhel RBA s osou BD je tudíž dvojnásobkem obvodového úhlu RCA. Proto jsou shodné tři úhly PBA, RBP a RCP vyznačené na obrázku. Shodnost posledních dvou úhlů s ohledem na předchozí odstavec už znamená, že bod R skutečně leží na kružnici opsané trojúhelníku BCP. Pro bod S totéž platí díky analogické shodnosti úhlů PCD, SCP a SBP.



Z dokázaného plyne, že body B, C, R, S leží na jedné kružnici, přitom body R a S leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou BC. Odtud plyne shodnost úhlů BRC a BSC, která spolu s rovnostmi $|BC| = |BR| = |CS|$ znamená, že rovnoramenné trojúhelníky RBC a SCB jsou shodné. Shodnost jejich výšek z vrcholů R a S tak stejně jako v prvním řešení už vede k dokazovanému vztahu $BC \parallel RS$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky následovně:

A1. Zdůvodnění rovností $|BR| = |BA|$ a $|CS| = |CD|$: 1 bod.
A2. Důkaz, že B je střed kružnice opsané trojúhelníku ARC: 1 bod.
A3. Důkaz, že C je střed kružnice opsané trojúhelníku BSD: 1 bod.
B1. Důkaz, že body A, D, R, S leží uvnitř téže poloroviny s hraniční přímkou BC: 2 body.
B2. Odvození $|\sphericalangle CBR| = |\sphericalangle BCS|$: 2 body.
B3. Důkaz, že trojúhelníky RBC a SCB jsou podobné: 3 body.
C1. Důkaz, že body R a S leží na kružnici opsané trojúhelníku BCP: 3 body za oba body R a S, 2 body za jeden, není-li analogie pro druhý bod zmíněna.

Body z B2, B3 a C1 udělte i v případě, kdy řešitel nepodá důkaz z B1 a ani potřebnou polohu bodů R a S explicitně nezmíní.

Celkem pak udělte $\max(\text{A1}, \text{A2} + \text{A3}, \text{B1} + \text{B2}, \text{B1} + \text{B3}, \text{B1} + \text{C1})$ bodů.

4. *Najděte všechny trojice přirozených čísel a, b, c, pro které je součin*

$$(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c+2036)$$

roven mocnině některého prvočísla s celočíselným exponentem. (Ján Mazák)

Řešení. Nejprve si všimněme, že aspoň jedno z čísel $a+b$, $a+c$ a $b+c$ musí být sudé. Skutečně, z tří čísel a, b, c některá dvě mají stejnou paritu, tudíž jejich součet je sudý.

Pokud je součin ze zadání mocninou prvočísla p, pak každý ze čtyř činitelů musí být mocninou p. Jak už víme, některý z prvních tří činitelů je sudý, musí proto platit $p=2$. Každý ze čtyř činitelů je tedy mocninou dvou, která je přitom větší než $1=2^0$, neboť čísla a, b, c jsou podle zadání přirozená. Odtud plyne, že každý činitel je sudé číslo.

Dále pozorujme, že čísla $a+b$, $a+c$, $b+c$ jsou všechna sudá, právě když čísla a, b, c mají všechna stejnou paritu. Protože číslo $a+b+c+2036$ je sudé, musí být a, b a c sudá čísla. Můžeme proto psát $a=2a_1$, $b=2b_1$ a $c=2c_1$, kde a_1, b_1, c_1 jsou přirozená čísla. Pak ovšem platí

$$(a+b)(a+c)(b+c)(a+b+c+2036)=2^4(a_1+b_1)(a_1+c_1)(b_1+c_1)(a_1+b_1+c_1+1018).$$

Součin posledních čtyř závorek musí být mocninou dvou. Trojice čísel a_1, b_1, c_1 je tedy řešením původní úlohy s konstantou 1018 namísto 2036. Ze stejného důvodu jako výše i čísla a_1, b_1 a c_1 musí být sudá. Označíme proto a_2, b_2 a c_2 po řadě jejich poloviny (jsou to opět přirozená čísla) a dostaneme

$$(a+b)(a+c)(b+c)(a+b+c+2036)=2^8(a_2+b_2)(a_2+c_2)(b_2+c_2)(a_2+b_2+c_2+509).$$

A opět tu máme stejnou úlohu s konstantou 509, takže i čísla a_2, b_2 a c_2 mají nutně stejnou paritu. Protože však číslo 509 je liché, musí být a_2, b_2 a c_2 lichá čísla. Vidíme, že trojice $a_2=b_2=c_2=1$ úloze vyhovuje (neboť $3+509=512$ je mocnina dvou), tudíž odpovídající trojice $a=b=c=4$ je řešením původní úlohy. Ukážeme, že je to řešení jediné.

Připusťme tedy, že je některé z čísel a_2, b_2, c_2 větší než jedna, nechť je to c_2 bez újmy na obecnosti. Pak ovšem mocnina dvou rovná a_2+c_2 je větší než 2, takže je dělitelná čtyřmi. To znamená, že při dělení čtyřmi jedno z lichých čísel a_2, c_2 dává zbytek 1 a druhé zbytek 3. Třetí liché číslo b_2 tak má při dělení čtyřmi stejný zbytek jako jedno z čísel a_2, c_2. Součet b_2 s tímto číslem pak má zbytek 2 a protože tento součet je zároveň mocninou dvou, musí jít o mocninu 2^1. Odtud plyne, že $b_2=1$ a $a_2=1$ (rovnost $c_2=1$ je vyloučena naším předpokladem $c_2>1$). Zbytek 3 při dělení čtyřmi tak nutně dává číslo c_2. Pak ale číslo $a_2+b_2+c_2+509$ rovné c_2+511 dává při dělení čtyřmi zbytek 2, tudíž to není mocnina dvou, a to je spor.

Závěr. Zadání úlohy vyhovuje jediná trojice $(a,b,c)=(4,4,4)$.

Jiné řešení. Nechť bez újmy na obecnosti platí $a \geqq b \geqq c$, takže pak $a+b \geqq c+a \geqq b+c \geqq 2$. Součin $(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c+2036)$ je mocninou některého prvočísla, právě když jsou mocninami tohoto prvočísla všichni čtyři činitelé $a+b$, $b+c$, $c+a$ a $a+b+c+2036$. Nechť tedy $a+b=p^k$, $c+a=p^l$ a $b+c=p^m$ pro nějaké prvočíslo p a celá nezáporná čísla k, l a m. Pro ně podle úvodní věty platí $k \geqq l \geqq m \geqq 1$.

Kdyby platilo $k > l$, a tedy $k-1 \geqq l$ a $k-1 \geqq m$, s ohledem na $p \geqq 2$ bychom měli

$$a+b = p^k \geqq p^{k-1} + p^{k-1} \geqq p^l + p^m = (c+a) + (b+c) > a+b,$$

a to je (podle krajních výrazů) spor. Nutně tedy $k = l$, takže $a+b = p^k = p^l = c+a$, odkud $b = c$. Pak ovšem $p^m = b+c = 2b$, a tedy $b = c = p^m/2$, tudíž $2 \mid p$ neboli $p = 2$, a proto $b = c = 2^{m-1}$ a $a+b = 2^k$. Protože $p = 2$, je také $a+b+c+2036 = 2^n$ pro nějaké celé číslo n, které zřejmě splňuje podmínku $2^n > 2036$.

Podle závěru předchozího odstavce čísla k, m, n splňují rovnost

$$2^n = (a+b) + c + 2036 = 2^k + 2^{m-1} + 2036.$$

Všimněme si, že při dělení číslem 16 číslo 2036 dává zbytek 4, zatímco větší mocnina 2^n dává jistě zbytek 0.* Z vypsané rovnosti tak plyne $2^k + 2^{m-1} \equiv 12 \pmod{16}$. Sčítanci 2^k a 2^{m-1} – jakožto mocniny dvou – mohou při dělení 16 dávat pouze zbytky 1, 2, 4, 8 a 0. Snadno nahlédneme, že odvozená kongruence platí jedině v případě, kdy jedna z mocnin 2^k, 2^{m-1} dává zbytek 4 a druhá 8. Podle těchto zbytků jde nutně o mocniny 2^2 a 2^3, takže $\{k, m-1\} = \{2, 3\}$. Jelikož však $2^{m-1} = b < a+b = 2^k$, je nutně $m-1 < k$, a proto $m-1 = 2$ a $k = 3$, tudíž $b = c = 2^{m-1} = 4$ a $a+b = 2^k = 8$, odkud také $a = 4$. Dostáváme tak jedinou možnou trojici $(a, b, c) = (4, 4, 4)$. Ta je skutečně řešením úlohy – součin ze zadání má tehdy hodnotu $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 2048$, přitom $8 = 2^3$ a $2048 = 2^{11}$.

Poznámka. Proč jsme rovnici $2^n = 2^k + 2^{m-1} + 2036$ řešili úvahami o dělitelnosti číslem 16? Byla to vhodná forma řešení této rovnice přepsané do dvojkové soustavy (čemuž jsme se chtěli vyhnout), v níž má každá mocnina dvou (dále jen „mocnina“) zápis tvaru $100\ldots0$, zatímco číslo 2036 má 11místný zápis 111 1111 0100. Abychom z něho přičtením dvou mocnin dostali opět mocninu, je zřejmé, že zápis menší přičítané mocniny musí být 100 a té větší pak 1000, tj. jde o mocniny určené jejich zbytky při dělení číslem $2^4 = 16$. Podobně využijeme dělitelnost číslem 16 i u obecnější rovnice $2^n = 2036 + 2^{k-1} + 2^{l-1} + 2^{m-1}$ z následujícího třetího řešení.

Jiné řešení. Zachovejme označení p, k, l, m, n z druhého řešení. Stejně jako tam budeme předpokládat, že $a \geqq b \geqq c$, takže i nyní bude platit $k \geqq l \geqq m \geqq 1$. Ukážeme, jak je možné vynechat odvození rovnosti $k = l$.

Nejprve dokážeme, že $p = 2$.** Kdyby prvočíslo p bylo liché, byl by lichý i součet čísel $p^k + p^l + p^m$, který je však díky úpravě

$$p^k + p^l + p^m = (a+b) + (c+a) + (b+c) = 2(a+b+c)$$

nutně sudým číslem, a to je spor. Prvočíslo p je tedy sudé a rovnost $p = 2$ je tak dokázána. Podle užité úpravy, ve které položíme $p = 2$, navíc vidíme, že mocnina 2^n (rovná čtvrtému činiteli $2036 + a + b + c$) má vyjádření

$$2^n = 2036 + (a+b+c) = 2036 + \frac{1}{2}(2^k + 2^l + 2^m) = 2036 + 2^{k-1} + 2^{l-1} + 2^{m-1}.$$

Odtud podobně jako v prvním řešení získáme kongruenci

$$2^{k-1} + 2^{l-1} + 2^{m-1} \equiv 12 \pmod{16},$$

* Motivaci k úvahám o dělitelnosti číslem 16 objasníme v poznámce za tímto řešením.

** Další způsob odvození rovnosti $p = 2$ uvedeme v poznámce za tímto řešením.

tentokrát se součtem tří mocnin dvou na levé straně, jejichž možné zbytky při dělení číslem 16 jsou 1, 2, 4, 8, 0. Rozborem možností pro součet tří zbytků zjistíme, že – s ohledem na $k \geqq l \geqq m$ – zbytky mocnin z trojice $\left(2^{k-1}, 2^{l-1}, 2^{m-1}\right)$ tvoří jednu z trojic $(4,4,4)$, $(8,2,2)$ nebo $(0,8,4)$.

(i) *Případ trojice* $(4,4,4)$. Tehdy nutně platí $2^{k-1} = 2^{l-1} = 2^{m-1} = 4$ neboli $a+b = c+a = b+c = 8$, odkud $(a,b,c) = (4,4,4)$. Dosazením ověříme, že tato trojice vyhovuje zadání úlohy.

(ii) *Případ trojice* $(8,2,2)$. Tehdy máme $2^{k-1} = 8$ a $2^{l-1} = 2^{m-1} = 2$, odkud $a+b = 16$ a $c+a = b+c = 4$. To však odporuje tomu, že $a+b < (c+a)+(b+c)$.

(iii) *Případ trojice* $(0,8,4)$. Tehdy máme $2^{l-1} = 8$ a $2^{m-1} = 4$, takže rovnost $2^n = 2^{k-1} + 2^{l-1} + 2^{m-1} + 2036$ získává tvar $2^n = 2^{k-1} + 2048$, kde $2048 = 2^{11}$, takže nutně $2^n > 2^{11}$ neboli $n \geqq 12$. Z rovnosti $2^n = 2^{k-1} + 2^{11}$ proto plyne kongruence $2^{k-1} \equiv 2^{11} \pmod{2^{12}}$, která je splněna pouze pro $k = 12$. Pro čísla a, b, c tak platí $a+b = 2^k = 2^{12}$, $c+a = 2^l = 16$ a $b+c = 2^m = 8$, což opět odporuje tomu, že $a+b < (c+a)+(b+c)$.

V souhrnu tak docházíme ke stejnému závěru jako v prvním řešení: zadání úlohy vyhovuje jediná trojice $(a,b,c) = (4,4,4)$.

POZNÁMKA. Předpokládejme, že čísla $a+b$, $b+c$, $c+a$ a $a+b+c+2036$ (větší než 1) jsou mocninami některého prvočísla p a uveďme další důkaz rovnosti $p = 2$.

Protože levá strana rovnosti

$$2(a+b+c+2036) - (a+b) - (b+c) - (c+a) = 4072$$

je dělitená prvočíslem p, z rozkladu $4072 = 2^3 \cdot 509$ plyne, že p je rovno jednomu z prvočísel 2 nebo 509. Připusťme, že $p = 509$. Po vydělení uvedené rovnosti číslem 509 pak dostaneme

$$2 \cdot \frac{a+b+c+2036}{509} - \frac{a+b}{509} - \frac{b+c}{509} - \frac{c+a}{509} = 8.$$

Všechny čtyři zlomky v této rovnosti jsou celá čísla a současně mocniny 509, dávají tedy při dělení 509 zbytky 0 nebo 1. Je proto patrné, že levá strana rovnosti nemůže dávat při dělení 509 zbytek 8, který dává pravá strana. Tento spor už dokazuje, že skutečně platí $p = 2$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky následovně:

A1. Správná odpověď (i bez odvození a zkoušky): 1 bod.
B1. Odvození rovnosti $p = 2$ úvahou o paritě čísel a, b, c: 2 body.
B2. Odvození, že čísla a, b, c jsou sudá, a přechod k úloze s konstantou 1018: 1 bod.
B3. Přechod k úloze s konstantou 509 a pozorování, že každé její řešení je trojice lichých čísel: 1 bod.
B4. Dořešení úlohy s konstantou 509: 0–2 body podle míry úplnosti.
C1. Zdůvodnění, že aspoň dvě z čísel a, b, c se rovnají: 2 body.
C2. Odvození rovnosti $p = 2$ za předpokladu z C1: 1 bod.
C3. Odvození rovnice typu $2^n = 2^k + 2^{m-1} + 2036$: 1 bod.
C4. Vyřešení rovnice z C3: 0–2 body podle míry úplnosti.
D1. Odvození $p = 2$ bez předpokladu, že aspoň dvě z čísel a, b, c se rovnají: 2 body, z toho 1 bod za zdůvodnění $p \in \{2, 509\}$.
D2. Odvození rovnice typu $2^n = 2^{k-1} + 2^{l-1} + 2^{m-1} + 2036$: 1 bod.
D3. Vyřešení rovnice z D2: 0–3 body podle míry úplnosti.

Celkem pak udělte $\max(\mathrm{A1}, \mathrm{B1}+\mathrm{B2}+\mathrm{B3}+\mathrm{B4}, \mathrm{C1}+\mathrm{C2}+\mathrm{C3}+\mathrm{C4}, \mathrm{D1}+\mathrm{D2}+\mathrm{D3})$ bodů. Absenci zkoušky v jinak úplném řešení nepenalizujte.