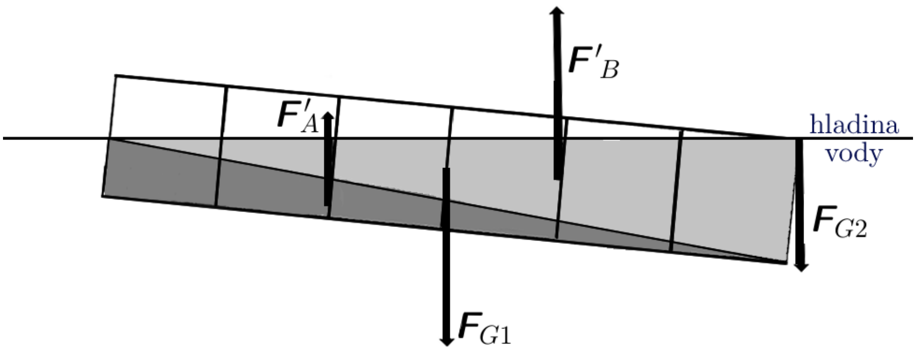
Řešení úloh krajského kola 63. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie A

Úlohy navrhli J. Thomas (1, 2, 3) a F. Studnička (4)

1. a) Rozložení sil a jejich velikostí při poloze vrány na kraji desky jsou na obrázku R1.



Obr. R1

Tíha vrány $\boldsymbol{F}_{G2}$ působí na okraji desky, tíhová síla desky samotné $\boldsymbol{F}_{G1}$ má působiště v jejím těžišti. Protože nad hladinu vyčnívá čtvrtina objemu desky, tvoří část pod hladinou dvě tělesa tvaru klínu. Na pravoúhlý klín působí vztlaková síla $\boldsymbol{F'}_A$ v jeho těžišti, které je vzdálené jednu třetinu délky desky od levého okraje. Na rovnoramenný klín uprostřed působí vztlaková síla $\boldsymbol{F'}_B$ v jedné třetině délky desky od jejího pravého okraje. Protože tento klín zaujímá $\frac{2}{3}$ objemu ponořené části desky, je velikost této části vztlakové síly $F'_B = \frac{2}{3}(m+M)g$. Podle momentové věty vzhledem k ose procházející působištěm síly F'_A kolmo k nákresně

$$Mg\frac{1}{6}l + mg\frac{2}{3}l = \frac{2}{3}(m+M)g\frac{1}{3}l \quad \Rightarrow \quad m = \frac{M}{8} = 0{,}5\ \text{kg}.$$ **4 body**

b) Velikost síly F'_A můžeme určit z momentové věty vzhledem k ose procházející působištěm síly F'_B kolmo k nákresně

$$Mg\frac{1}{6}l = mg\frac{1}{3}l + F'_A\frac{1}{3}l \quad \Rightarrow \quad F'_A = \frac{3}{8}Mg.$$

Velikost vztlakové síly v okamžiku, kdy vrána stála uprostřed desky, byla

$$F_{vz} = (m+M)g = \frac{9}{8}Mg = 44\ \text{N}.$$

Velikost vztlakové síly v okamžiku, kdy vrána stojí na konci desky,

$$F_{vz} = F'_A + F'_B = \frac{3}{8}Mg + \frac{2}{3}(m+M)g = \frac{9}{8}Mg = 44\ \text{N}.$$

Velikost vztlakové síly se nezměnila. **2 body**

c) Označme x poměrnou část objemu desky pod vodou a y celkový počet vran na desce. Pak platí

$$(M+m)g = \rho \cdot \frac{3}{4}Vg, \tag{1}$$

$$(M+2m)g = \rho \cdot xVg, \tag{2}$$

$$(M+ym)g = \rho V g. \tag{3}$$

Z rovnic (1) a (2) plyne

$$x = \frac{3\,(M+2m)}{4\,(M+m)} = \frac{5}{6}.$$

Po přisednutí druhé vrány bude pod vodou $\frac{5}{6}$ objemu desky.
Z rovnic (1) a (3) plyne

$$y = \frac{M+4m}{3m} = 4.$$

Deska unese 4 vrány. **4 body**

Alternativní řešení úvahou: Poměr hmotností desky a vrány je 8:1. Proto na desku připadá $\frac{8}{9}$ a na vránu $\frac{1}{9}$ ponořeného objemu desky, tj. na desku $\frac{8}{9}\cdot\frac{3}{4}=\frac{2}{3}$ a na vránu $\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{12}$ objemu celé desky. Proto objem po přisednutí druhé vrány bude $\frac{3}{4}+\frac{1}{12}=\frac{5}{6}$ objemu desky. Připadá-li na samotnou desku ponor $\frac{2}{3}$ objemu desky, pak zbývající $\frac{1}{3}=\frac{4}{12}$ ponoru objemu desky způsobí ponor 4 vrány po $\frac{1}{12}$.

2. a) Zvolme souřadnou soustavu s počátkem v místě výstřelu. Z kinematických rovnic

$$v_x = v_0 \cos\alpha, \quad v_y = v_0 \sin\alpha - gt,$$

$$x = v_0 t\cos\alpha, \quad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2,$$

pro dobu a výšku výstupu do nejvyššího bodu trajektorie plyne

$$T = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}, \quad H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Odtud odvodíme vztah pro délku vrhu

$$d = v_0 2T\cos\alpha = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{{v_0}^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Aby šíp doletěl do největší vzdálenosti, musí být vystřelen pod úhlem $\alpha = 45°$. Doletí pak do vzdálenosti $d = 40{,}8$ m a dosáhne největší výšky $H = 10{,}2$ m.

2 body

b) Ve zvolené souřadnicové soustavě pevně spojené se zemí platí:

$$v_x = v_0 + v_0 \cos\alpha \quad v_y = v_0 \sin\alpha - gt,$$

$$x = v_0 t(1+\cos\alpha) \quad y = v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2,$$

$$T = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}; \quad H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g},$$

$$d = v_0 2T(1+\cos\alpha) = \frac{2v_0^2 \sin\alpha(1+\cos\alpha)}{g} = \frac{v_0^2(2\sin\alpha + \sin 2\alpha)}{g}.$$

Určíme maximum této funkce:

$$\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{v_0^2(2\cos\alpha + 2\cos 2\alpha)}{g} = \frac{2v_0^2(\cos\alpha + \cos 2\alpha)}{g} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha + cos 2\alpha = \cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = 0.$$

Řešením kvadratické rovnice obdržíme $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, tedy $\alpha = 60°$.

Šíp musí být vystřelen pod úhlem 60°, dolétne pak do vzdálenosti $d_1 = 106$ m. Dosáhne přitom největší výšky $H_1 = 15{,}3$ m. **4 body**

c) Podobně odvodíme

$$v_x = v_0 \cos\alpha - \frac{v_0}{2}, \quad v_y = v_0 \sin\alpha - gt,$$

$$x = v_0 t \left(\cos\alpha - \frac{1}{2}\right), \quad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2,$$

$$T = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}; \quad H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g},$$

$$d = v_0 2T (\cos\alpha - \frac{1}{2}) = \frac{2v_0^2 \sin\alpha (\cos\alpha - 0{,}5)}{g} = \frac{v_0^2 (\sin 2\alpha - \sin\alpha)}{g}.$$

Určíme maximum této funkce:

$$\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{v_0^2 (2\cos 2\alpha - \cos\alpha)}{g} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2\cos 2\alpha - \cos\alpha = 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha - \cos\alpha = 4\cos^2\alpha - \cos\alpha - 2 = 0.$$

Řešením kvadratické rovnice obdržíme $\cos\alpha = 0{,}843$, tedy $\alpha = 32{,}5°$.

Šíp musí být vystřelen pod úhlem 32,5° a dolétne přitom do vzdálenosti $d_2 = 15{,}0$ m. Dosáhne přitom výšky $H_2 = 5{,}90$ m. **4 body**

3. a) V první černé skříňce je spojná čočka. V druhé černé skříňce je optická mřížka. V prvním postavení čočka na obraz na stínítku nemá vliv a při vzdalování stínítka se poloha maxim prvního řádu od maxima nultého řádu zvětšuje. Při záměně poloh čočky a mřížky se na stínítku zobrazí i maxima druhého řádu. Vzhledem k tomu, že se poloha maxim na stínítku při jeho posunování nemění, leží mřížka v ohniskové rovině čočky a paprsky za čočkou jsou rovnoběžné. Ohnisková vzdálenost čočky je tedy 1,0 m. **3 body**

Ještě určíme mřížkovou konstantu mřížky. Protože $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{x}{d} \cong \sin\alpha$, bude mřížková konstanta

$$b = \frac{k\lambda}{\sin\alpha} \cong \frac{d\lambda}{x} = 60\ \mu\text{m}.$$ **1 bod**

b) Při posunutí mřížky tak, aby byla ve vzdálenosti a od stínítka a d od čočky, ohybový úhel α zůstane stejný, stínítko bude ale v poloviční vzdálenosti a tedy i vzdálenost mezi maximy bude poloviční, budou vidět i maxima druhého řádu, proto na stínítku budou tři bodyve vzájemné vzdálenosti 1 cm, tedy vzdálenosti odpovídající obrázku 3. **1 bod**

Zaměníme-li polohu čočky a mřížky, bude se mřížka nacházet ve vzdálenosti $d = 2f = 2{,}0$ m před čočkou. Na čočku dopadají právě maxima nultého a prvního řádu, odpovídající obrázku 2. Tyto tři paprsky se za čočkou sbíhají ve vzdálenosti $2a = 2f = 2{,}0$ m. Stínítko je ve vzdálenosti $a' = a = 1{,}0$ m za čočkou, budou na něm tedy zase jen maxima nultého a prvního řádu a obraz bude odpovídat obrázku 2. **2 body**

c) Při změně vlnové délky dopadajícího světla se zmenší vzdálenost mezi maximy nultého a prvního řádu v případě a) na $x_1 = d \operatorname{tg} \alpha \cong d \sin \alpha = \frac{d\lambda_1}{b} = 1{,}3$ cm. Maxima druhého řádu budou ve vzdálenosti $x_2 = d \operatorname{tg} \alpha \cong d \sin \alpha = \frac{dk\lambda_1}{b} = 2{,}7$ cm a na stínítku budou také zachycena. Místo 3 bodů uvidíme tedy 5 bodů, vzdálených od sebe 1,3 cm. **1 bod**

Při záměně poloh čočky a mřížky se na stínítku zobrazí maxima druhého i třetího řádu, budeme tady pozorovat 7 bodů, mezi nimiž bude vzdálenost $x_3 = 0{,}7$ cm. **1 bod**

Při změně polohy čočky a mřížky podle části b) bude na stínítku při pořadí čočka–mřížka vidět 5 bodů ve vzájemné vzdálenosti x_1.
Při pořadí mřížka–čočka budou body v poloviční vzájemné vzdálenosti. **1 bod**

4. a) Potenciální energie elektrostatického pole kondenzátoru je

$$E_p = \frac{1}{2} C U^2 \tag{1}$$

a pro kapacitu kondenzátoru platí

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}. \tag{2}$$

Zároveň pro napětí mezi deskami kondenzátoru můžeme psát

$$U = Ed. \tag{3}$$

Kombinací rovnic (1), (2) a (3) obdržíme finální tvar

$$E_p = \frac{1}{2} \varepsilon_0 S d E^2.$$

Hustota energie je definována jako $w = \frac{E}{V}$. Proto po dosazení objemu oblasti mezi deskami kondenzátoru získáme tvar

$$w = \frac{E}{Sd} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2.$$ **2 body**

b) Pokud bychom změnili vzdálenost desek d, vykonali bychom práci rovnou změně potenciální energie elektrostatického pole kondenzátoru:

$$F \cdot \Delta d = \Delta E_p. \tag{4}$$

S využitím hustoty energie můžeme psát

$$\Delta E_p = w \Delta V = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 S \Delta d. \tag{5}$$

Z rovnic (4) a (5) obdržíme

$$F \cdot \Delta d = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 S \Delta d,$$

$$F = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 S.$$ **3 body**

Ke stejnému výsledku můžeme dospět i bez hustoty energie. Nyní uvažujme, že je kondenzátor od zdroje odpojen, a tak zůstává náboj na deskách kondenzátoru stejný:

$$\Delta E_p = \Delta\left(\frac{1}{2}CU^2\right) = \frac{1}{2}\Delta C\left(\frac{Q}{\Delta C}\right)^2 = \frac{Q^2}{2\Delta C} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0\frac{S}{\Delta d}} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\Delta d,$$

$$F\cdot\Delta d = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\Delta d = \frac{C^2U^2}{2\varepsilon_0 S}\Delta d = \frac{\varepsilon_0^2\frac{S^2}{d^2}E^2d^2}{2\varepsilon_0 S}\Delta d = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 S\Delta d.$$

c) Představme si, že kondenzátor budeme vytahovat z vody z úrovně horní desky v hladině vody do úrovně dolní desky v hladině vody. Jednou toto posunutí po dráze d provedeme s nenabitým kondenzátorem, podruhé s nabitým. Rozdílová síla ΔF těch sil, kterými kondenzátor při prvním a druhém vynoření držíme, je způsobena zánikem polarizace dielektrika. Odpovídající vykonaná práce $W = \Delta F d = \Delta p S d$ je rovna přírůstku energie kondenzátoru:

$$\Delta E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}C_2U_2^2 - \frac{1}{2}C_1U_1^2 = \frac{1}{2}\cdot\varepsilon_0\frac{S}{d}\cdot(Ed)^2 - \frac{1}{2}\cdot\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}\frac{S}{d}\cdot\left(\frac{E}{\varepsilon_\mathrm{r}}d\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 SE^2d - \frac{1}{2\varepsilon_\mathrm{r}}\varepsilon_0 SE^2 d = \frac{1}{2}\varepsilon_0 SE^2 d\left(1-\frac{1}{\varepsilon_\mathrm{r}}\right) = \frac{\varepsilon_0\left(\varepsilon_\mathrm{r}-1\right)SE^2d}{2\varepsilon_\mathrm{r}}.$$

Z rovnosti $W = \Delta E_\mathrm{p}$ plyne

$$\Delta p = \frac{\varepsilon_0\left(\varepsilon_\mathrm{r}-1\right)E^2}{2\varepsilon_\mathrm{r}}.$$

Pro zadané hodnoty $\Delta p = 4{,}4\cdot 10^{-4}$ Pa. **5 bodů**

Alternativní řešení: Změnu tlaku odvodíme pro vodorovnou polohu desek, ale že získaný výsledek platí i pro jiné polohy. Desky se podle b) vzájemně přitahují silou $F = \frac{1}{2}\varepsilon_0 SE^2$. Vložením dielektrika se náboj na deskách zachová, avšak vlivem vzniku vázaného náboje v dielektriku polarizací se původní síla F rozloží na sílu $F' = \frac{F}{\varepsilon_\mathrm{r}}$ působící mezi deskami a sílu $F'' = F - \frac{F}{\varepsilon_\mathrm{r}} = \frac{\varepsilon_\mathrm{r}-1}{\varepsilon_\mathrm{r}}F$ působící mezi dielektrikem a deskou. Tím v kapalném dielektriku tato síla vyvolá přídavný tlak

$$\Delta p = \frac{F''}{S} = \frac{\varepsilon_0\left(\varepsilon_\mathrm{r}-1\right)E^2}{2\varepsilon_\mathrm{r}}.$$